

量子群と非可換調和解析

佐藤ふたば

東京大学大学院数理科学研究科博士課程 2 年

2026/09/10

概要

量子群とは、群の構造を代数の言葉に翻訳することによって拡張したものである。

特に、作用素環論とよばれる無限次元の線形代数の理論を考えることで、コンパクト群の拡張であるコンパクト量子群というものを考えることができる。

本講演では、あるコンパクト量子群のクラスについて、その上の確率過程や（非可換） L^p 理論を考えることで「かたち」を調べられる、ということについて話す。

古典力学から，量子力学と作用素環へ

古典力学においては，

- ▶ 状態のなす空間：多様体 X
- ▶ 物理量（観測して得られる位置やエネルギーなどの量）：
 X 上のなめらかな関数

という枠組みから出発する．

特に，物理量を与える関数は，各点での演算により積について可換な代数をなす．

また，古典力学での物理系が対称性を持つときには，群で表すことができる．

これに対し、量子力学では、von Neumann による次の描像が用いられる：

- ▶ 状態のなす空間：Hilbert 空間 H
- ▶ 物理量： H に作用する線形作用素

作用素環論は、Hilbert 空間に作用する線形作用素のなす、積が可換とは限らない代数について調べる分野である。

特に、この非可換な代数の可換化を考えることで、古典力学を復元できるような理論を作りたい。

それでは、「可換化」すると群を得られるような、群の拡張概念を作用素環論で考えるとどうだろうか？

→作用素環論的な量子群

作用素環論的な量子群とは

作用素環論的な量子群のなかでも、コンパクト群の拡張にあたるコンパクト量子群についてみていく。

コンパクト群は、構造を次の二種類の代数の言葉に翻訳することができる。

- ▶ 位相の構造：可換な積を持つ作用素環
- ▶ 群の構造：Hopf $*$ -代数

コンパクト量子群は、非可換な積をもつ作用素環であって、Hopf $*$ -代数の構造も持つものとして定義される。

以下では、作用素環や Hopf $*$ -代数がどのようにコンパクト群の性質に対応するかを説明していく。

作用素環とは

まずは、作用素環と位相の関係についてみる。

以下では作用素環のクラスの一つである C^* 環を扱う。

Definition (C^* 環)

C^* 環とは、 $\mathbb{C}$ 上の線形代数であって、involution $*$: $A \rightarrow A$ と完備なノルム $\|\cdot\|$ で、 $\|a\|^2 = \|a^*\|^2 = \|a^*a\|$ ($a \in A$) をみたすものをもつもののことをいう。

C^* 環は無限次元でもよく、積が非可換な場合もある。

また、積は単位的であるとは限らない。

Example (有限次元の行列環)

$\mathbb{C}$ 上の $n \times n$ 行列全体 $M_n(\mathbb{C})$ は、複素共役転置 $*$ とノルムについて C^* 環をなす。

B を有限次元の C^* 環とすると、 $B \cong \bigoplus_{i=1}^m M_{n_i}(\mathbb{C})$ である。

作用素環の例（コンパクトハウスドルフ空間の関数環）

X をコンパクトハウスドルフ空間とすると,
 $C(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C}, \text{continuous}\}$ は次により単位的な積をもつ, 可換な C^* 環となる.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x),$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad f^*(x) = \overline{f(x)}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Theorem (Gelfand-Naimark の定理)

単位的で可換な積を持つ C^* 環と, コンパクトハウスドルフ空間の間には, (同型や同相をのぞいて) 1 対 1 の対応がある.

非可換幾何

Gelfand-Naimark の定理により、(単位的で) 非可換な積を持つ C^* 環を考えているときは、コンパクトハウスドルフ空間の拡張物を考えているとみなすことができる (非可換幾何の哲学)。

この意味で、 C^* 環を「非可換な空間」とみて、通常の意味での空間と同じような性質が成り立つのか、どんな違いがあるのかについて考えてみたい。

しかし、Gelfand-Naimark の定理では、連続関数による関数環との対応についてしか言及しておらず、微分構造については何もわからない。

実際、非可換な空間に対しては、標準的な微分構造の定義が確立されているわけではなく、互いに同値でない微分構造が複数取りうる場合もある。

Hopf $*$ -代数

次に、群の構造と Hopf $*$ -代数の対応についてみる。

Hopf $*$ -代数とは、 $*$ -代数であって、さらに余代数の構造（余積 Δ ・余単位 ε ・対合射 S ）をもつものをいう。

Example

G をコンパクト群とし、 $O(G)$ を G の有限次元表現を行列表示した時の成分が生成する $*$ -代数とする。

$O(G)$ は G 上の連続関数全体がなす単位的で可換な積をもつ C^* 環 $C(G)$ の稠密な $*$ -部分代数で、次により Hopf $*$ -代数の構造をもつ：

- ▶ (余積) $*$ -準同型 $\Delta : O(G) \rightarrow O(G) \otimes O(G) \subset C(G \times G)$,
 $\Delta(f)(g, h) = f(gh)$;
- ▶ (余単位) 線型写像 $\varepsilon : O(G) \rightarrow \mathbb{C}$, $\varepsilon(f) = f(e)$;
- ▶ (対合射) 反準同型 $S : O(G) \rightarrow O(G)$, $S(f)(g) = f(g^{-1})$

($f \in O(G)$, $g, h \in G$, ただし e は G の単位元.)

コンパクト量子群

コンパクト量子群 $\mathbb{G}$ とは, 次の二つによる組をいう [Woronowicz 1987]:

- ▶ (可換とは限らない) 単位的な C^* 環 $C(\mathbb{G})$;
- ▶ $*$ -準同型 $\Delta : C(\mathbb{G}) \rightarrow C(\mathbb{G}) \otimes C(\mathbb{G})$ でいくつかの条件をみたすもの (余積).

$\mathbb{G}$ の有限次元 Hilbert 空間 H 上の表現とは,

$U = (u_{ij})_{1 \leq i, j \leq \dim H} \in B(H) \otimes C(\mathbb{G})$ でいくつかの条件を満たすものをいう.

$\mathbb{G}$ の有限次元表現の行列成分で生成される $*$ -代数 $O(\mathbb{G})$ は $C(\mathbb{G})$ で稠密な Hopf $*$ -代数である.

The Haar state

コンパクト群 G に対しては, Haar 測度と呼ばれるよい測度 μ が存在し, これに基づいてフーリエ解析を考えることができる.

とくに, Haar 測度 μ は Haar functional と呼ばれる線型汎函数と同一視できる: $f \mapsto \int f(x) d\mu(x)$ for $f \in C(G)$.

コンパクト量子群においても, $C(\mathbb{G})$ 上のよい線型汎函数 (state) で Haar 測度の役割を果たすものが唯一存在し, これを Haar state という.

特に Haar state h が trace である ($h(fg) = h(gf)$, $f, g \in C(\mathbb{G})$) ととき, $\mathbb{G}$ は Kac type であるという.

Haar state での評価を Haar 測度での積分とみなすことにより, コンパクト量子群上での非可換 L^p 理論を考えることができる.

有限次元 C^* 環の量子自己同型群 $\text{Aut}^+(B)$

有限次元の C^* 環 $B \cong \bigoplus_{i=1}^m M_{n_i}(\mathbb{C})$, の自己同型群 $\text{Aut}(B)$ とは, B から B への C^* 環としての同型写像によるコンパクト群のことである.

有限次元 C^* 環 B の量子自己同型群 $\text{Aut}^+(B)$ は, 生成元と関係式により与えられるコンパクト量子群である [Wang 1998].

$O(\text{Aut}^+(B))$ の可換化が $O(\text{Aut}(B))$ になるという意味で, これは自己同型群 $\text{Aut}(B)$ の量子化である.

- ▶ $B = \mathbb{C}^n$ とすると, 自己同型群は $\text{Aut}(B) = S_n$ (対称群) で, 量子自己同型群は $\text{Aut}^+(B) = S_n^+$ (量子対称群) である.
- ▶ $B = M_n(\mathbb{C})$ とすると, 自己同型群は $\text{Aut}(B) = SU(n)$ で, 量子自己同型群 $\text{Aut}^+(B)$ は「量子直交群の射影版」になる.

$\dim B = 1, 2, 3$ のとき, $\text{Aut}^+(B)$ として $C(S_{\dim B})$ をえる.

$\dim B = 4$ のとき, $\text{Aut}^+(B)$ として $C(SO(3))$ か S_4^+ をえる.

S_4^+ と $\text{Aut}^+(B)$ で $\dim B \geq 5$ のものに対しては, もはや対応するコンパクト群は存在しない.

$\text{Aut}^+(B)$ の Haar state は trace である. ($\text{Aut}^+(B)$ は Kac type であるという) .

とくに, 既約表現の同値類は $\text{Irr}(\text{Aut}^+(B)) = \{U_k : k \in \mathbb{N}_{\geq 0}\}$ であり, $\dim B \geq 4$ のとき $SO(3)$ とおなじ fusion rule をみtas:

$$U_k \otimes U_s = U_{|k-s|} \oplus U_{|k-s|+1} \oplus \cdots \oplus U_{k+s-1} \oplus U_{k+s}$$

[Banica, 1999].

$\text{Irr}(\text{Aut}^+(B))$ 上の length function $|\cdot|$ を $|U_k| = k$ となるように定めることができる.

「かたち」の調べ方

一般に、幾何的な性質を調べる際に、(もし可能であれば) 微分は有力な方法の一つである。

とりわけ、微分方程式の解の性質は考えている空間の幾何的な性質に大きく依存するため、例えば熱方程式やラプラシアンなどの性質がわかれば空間についてもさまざまな情報を得られる。

さて、 $\text{Aut}^+(B)$ の性質について調べたいが、どのように微分構造を入れるとよいのか、うまく定義できるのかはよくわからない。

しかし、確率論を考えることで、ラプラシアンに相当するものを考えることができる。

ラプラシアンと熱方程式

$\mathbb{R}$ 上の熱方程式とは，次の微分方程式のことであった：

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta_x u(x,t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

ただし $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ であり， Δ_x をラプラシアンとする．
熱方程式の解は，熱半群と呼ばれる線形作用素の族
 $\{T_t = e^{-t\frac{1}{2}\Delta} : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})\}_t$ を用いて次のように書ける：

$$u(x,t) = T_t f(x).$$

ラプラシアンは熱半群の生成作用素である．

ブラウン運動と熱半群

$\mathbb{R}$ 上の確率過程とは, 時間 t で添字づけられた可測関数の族 $\{X_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}_t$ のことである.
ブラウン運動と熱半群 $\{T_t\}$ の間には次の関係がある.

$$u(x, t) = T_t f(x) = \mathbb{E}[f(X_t(x))].$$

よい確率過程と, 生成作用素とその定義域の間には, 1 対 1 対応がある.

$\mathbb{R}$ 上のブラウン運動では, 対応する生成作用素は $\frac{1}{2}\Delta_x$ である.

連結で単純なコンパクトリー群の上でも同様の理論が展開でき、特にブラウン運動を含むよいクラスの確率過程では、生成作用素は「Laplace-Beltrami 作用素 + Lévy 測度についての積分」と書ける (Lévy- Khinchin formula).
このようなよいクラスの確率過程は、コンパクト量子群上にも拡張することができる.

特に $\text{Aut}^+(B)$ では、対応する生成作用素について同様に「ある作用素 + Lévy 測度についての積分」という表示が得られる.
そこで、この表示で定数倍の規格化を施し、Lévy 測度を 0 としたような生成作用素をもつ確率過程を、 $\text{Aut}^+(B)$ 上のブラウン運動とよび、これに対応する半群を熱半群とよぶことにする.

Proposition (Brannan, Gao, and Junge, 2023)

$\text{Aut}^+(B)$ で $\dim B \geq 5$ なるものの上の熱半群は次のように表せる：

$$T_t(u_{ij}^{(k)}) = e^{-c_k t} u_{ij}^{(k)}$$

ただし $c_k \sim k$ であり， $u_{ij}^{(k)}$ は既約ユニタリー表現 U_k の (i, j) 番目の行列成分とする．

この表示は最初に量子対称群 S_n^+ に対して得られ [Franz, Kula, Skalski, 2016]，のちに $\text{Aut}^+(B)$ の場合に表現の圏のモノイダル同値をつかって拡張された．

トーラス上の Sobolev 不等式

トーラス $\mathbb{T}$ において, ソボレフ空間 $H_p^s(\mathbb{T})$ は Laplacian Δ を用いて Bessel potential $(1 - \Delta)^{-\frac{s}{2}}$ によっても定義できる:

$$H_p^s(\mathbb{T}) := \{f \in L^p(\mathbb{T}); (1 - \Delta)^{-\frac{s}{2}}(f) \in L^p(\mathbb{T})\}.$$

とくに, $1 < p \leq 2$ とすると, 次の Sobolev 不等式をえる:

$$\|(1 - \Delta)^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})}(f)\|_{L^2} \lesssim \|f\|_{L^p}, \quad f \in L^p(\mathbb{T})$$

[Hardy, Littlewood, 1927], [Bényi, Oh, 2013].

コンパクトリー群上での Sobolev 不等式

G を実次元 n の連結なコンパクトリー群とする.

$1 < p \leq 2$ とすると, Laplace-Beltrami operator $\Delta : \pi_{ij} \mapsto -\kappa_{\pi} \pi_{ij}$ に対して, π を G の有限次元既約表現とする時, 次が成り立つ:

$$\|(1-\Delta)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}(f)\|_{L^2} = \left(\sum_{\pi \in \text{Irr}(G)} \frac{n_{\pi}}{(1+\kappa_{\pi})^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}} \|\widehat{f}(\pi)\|_{HS}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \|f\|_{L^p},$$

$f \in L^p(G)$ [Akylyzhanov, Nursultanov, and Ruzhansky, 2016].

$\kappa_{\frac{1}{2}\pi} \approx |\pi|$ なので, π の $\text{Irr}(G)$ における自然な長さ関数を用いると (cf. [Wallach 1973]),

$$\left(\sum_{\pi \in \text{Irr}(G)} \frac{n_{\pi}}{(1+|\pi|)^{n(\frac{2}{p}-1)}} \|\widehat{f}(\pi)\|_{HS}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \|f\|_{L^p}, \quad f \in L^p(G).$$

を与える.

Sobolev embedding property on $\text{Aut}^+(B)$

Theorem (Youn, 2020)

B を有限次元の C^* 環で $\dim B \geq 4$ なるものとする.

任意の $1 < p \leq 2$ と $f \in L^p(\text{Aut}^+(B))$ に対し, $s \geq 3$ のとき次の Sobolev 不等式が成り立つ.

$$\left(\sum_{k \geq 0} \frac{n_k}{(1+k)^{s(\frac{2}{p}-1)}} \|\widehat{f}(k)\|_{HS}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \|f\|_{L^p}$$

さらに, S_n^+ と $C(SO(3))$ に対して, 上の不等式がなりたつのは $s \geq 3$ の場合に限られる.

Theorem (S., 2025)

B を有限次元 C^* 環で $\dim B \geq 5$ なるものとする.

任意の $1 < p \leq 2$ と $f \in L^p(\text{Aut}^+(B))$ に対し, 次の Sobolev 不等式
がなりたつのは, $s \geq 3$ のときに限られる.

$$\left(\sum_{k \geq 0} \frac{n_k}{(1+k)^{s(\frac{2}{p}-1)}} \|\widehat{f}(k)\|_{HS}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \|f\|_{L^p}$$

左辺を熱半群の生成元を使って書き直すことで, 熱半群の性質を用いて証明される.

$\text{Aut}^+(B)$ で $\dim B \geq 5$ のものや S_4^+ にはもはや対応する群は存在していないが, 「実次元」のようなものをえられたことになる.

今後の展望

- ▶ $\text{Aut}^+(B)$ の他の非可換 L^p 理論的な情報や、非可換幾何的な情報は得られるか？
- ▶ この「実次元」のような定数は何か別の意味を持ったり、応用したりできるか？
- ▶ 他のコンパクト量子群や、他の非可換空間で同様の結果は得られるか？
量子直交群ではほとんど同様の結果がえられているが、他の量子群ではまだわかっていないこともある。
- ▶ 作用素環論的な量子群における結果から、普通の群に対して新しくわかることはあるか？