

エノン画像の退化とハイブリット力学系.

色川 怜未 @ NTT基礎数学
研究セン7.

◎ 自己紹介. 色川 怜未 IROKAWA Reimi.

2013-2017 早稲田大学基幹理工学部数学科.

指導教員: 小松啓一先生 (岩澤理論).

2017-2019 東京工業大学 理学院数学科. 修士課程.

2019-2022 博士課程.

指導教員: 加藤文元先生 (リジッド幾何学).

2022- NTT 基礎数学研究セン7.

↳ 基礎数学, 量子情報との研究を中心. 8名在籍.

自由に自分の好きな研究ができる!

専門分野: p-進力学系 / 非アルキメデス的力学系 / 複素力学系.

応用

(今日のお話).

◎ Intro ① - 力学系とは?

“時間発展する系” のこと.

ここでは **離散力学系** と扱う. 漸近挙動が知りたい.

e.g. $a_{n+1} = a_n^2$. ↳ = 漸化式や定数の時間発展.

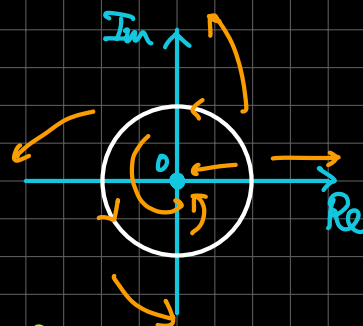
→ $n=0$ での状態が $n=1$ へ.

$n=1$ での状態が $n=2$ へ ... と, 逐次的に発展が連なる.

→ “ $n \rightarrow \infty$ はどうなる?” と問うことが出来る.

2. の例) z . $a_0 \in \mathbb{C}$ とすると. $a_n = a_0^{2^n}$ である.

$$\begin{cases} |a_0| < 1 \Rightarrow a_n \rightarrow 0. \\ |a_0| > 1 \Rightarrow a_n \rightarrow \infty. \end{cases}$$



$\Rightarrow |a_0| = 1$ (単位円盤) z = "Julia set of $a_{n+1} = a_n^2$ "
漸近挙動が不安定になる.

② Intro ② - Hénon (-Sibony) 写像.

$$f(x, y) = (x^2 + a - by, x) \quad (a, b \in \mathbb{C}, b \neq 0)$$

を Hénon 写像という. これは定力学系, つまり

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n^2 + a - by_n \\ x_n \end{pmatrix}$$

は, 現在の複素力学系理論の
主要な研究対象である.

- 一般化.

$$f(x, y) = (p(x) - by, x) \quad [p \in \mathbb{C}[x] \text{ monic}].$$

を (一般化) Hénon 写像と呼ぶことにしておく.

性質

- $f^{-1}(x, y) = (y, \frac{1}{b}(y^2 + a - x))$ と逆写像が書ける.

$$\begin{aligned} F(x:Y:Z) &= (x^2 + aZ^2 - bYZ : xZ : Z^2) \\ F^{-1}(x:Y:Z) &= (YZ : \frac{1}{b}(Y^2 + aZ^2 - xZ) : Z^2) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} F \in P_1^2 \text{ の} \\ \text{斉次化} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} I(F) &= \{ [0:1:0] \} \\ I(F^{-1}) &= \{ [1:0:0] \} \end{aligned} \quad \text{i.e. } I(F) \cap I(F^{-1}) = \emptyset.$$

この条件が満たされる) に $\mathbb{C}^N$ ($N \geq 2$, 整数) に一般化したものを
Hénon-Sibony 写像.

定義

$f: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ is Hénon-Sibony 写像.

def. - $f = (f_1, \dots, f_N)$ where $f_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]$.

- $\exists f^{-1}: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$.

- $F, F': \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. 互逆に射.

$$I(F) \cap I(F') = \emptyset.$$

注意

簡単のため、今日は Hénon 写像についてのみ結果を述べる.

実際には Hénon-Sibony 写像についても証明する.

(今日の講義では、この後は Hénon-Sibony 写像は登場しない.)

① Intro ③ - 退化現象.

$f(x, y) = (x^2 + a - by, x)$. Hénon 写像.

$\downarrow$

$f_t(x, y) = (x^2 + a(t) - b(t)y, x)$ Hénon 写像の族.

力学系の族の解析は、力学系の中の興味の一つ.

(cf. Mandelbrot 集合



$\xrightarrow{\text{top}}$ Cantor set

$\rightarrow f_t(z) = z^2 + t$ z. "Julia 集合が連結なハウスドルフ集合."

退化現象

$f_t(x, y) = (x^2 - ty, x)$ とする.

$t \neq 0$ is Hénon 写像.

$t = 0$ is $f(x, y) = (x^2, x)$ i.e. (文質) 1 変元の写像.

に退化.

$\leadsto t \rightarrow 0$ と $t = t_0$, 漸近挙動にどんな変化が起きる?
 という問題が考えられる。

◎ Intro ④ - 主定理.

Tum (I, 2025, 2026+).

$\{f_t\}_{t \in \mathbb{D}}$: Hénon 写像の族. $t=0$ は meromorphic 写像

μ_t : f_t の不変測度. ($t \in \mathbb{D}^*$)

f_{NA} : $\{f_t\}$ に誘導される $\mathbb{C}((t))$ 上の Hénon 写像

μ_{NA} : f_{NA} の不変測度.

$\pi_{hyb}: A^{N, hyb} \rightarrow \mathcal{U}_{hyb}(r)$ hybrid space.

$\tau: \mathcal{U}_{hyb}(r) \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{D}}_r$.

$\psi_t: \mathbb{C}^N \xrightarrow{\sim} (\pi^{hyb})^{-1}(\tau(t))$ for $t \neq 0$

$A_{\mathbb{C}((t))}^{NA} \xrightarrow{\sim} (\pi^{hyb})^{-1}(\tau(0))$. for $t = 0$.

$\leadsto$ この設定の下, 次の弱収束が成り立つ:

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\psi_t)_* \mu_t = (\psi_0)_* \mu_0.$$

二の後の予定

7月3日 < 二の主定理の意味を(分)の因子)に単語の意味を解説する.

- 力学系の不変測度.
- 誘導される $\mathbb{C}((t))$ 上の力学系.
- hybrid space, known results.

§ 力学系の不変測度.

★ 簡単のため, 1次元の力学系 $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ を考える.

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ の不変測度 μ / $\mathbb{C}$.

def $f_*\mu = d\mu$ where $d = \deg f$.

2次元の不変測度は多々2種類ある.

① δ_0 when $f(z) = z^2$.

② 標準測度. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} (f^n)^* \omega$ where ω : volume form.

→ 今回はこの対象. $\mu_f \in \mathcal{M}$.

力学的 Green 関数 を定義:

$$G_f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} \log \max\{1, |f^n(z)|\}$$

→ well-defined. 定義より $G(f(z)) = d \cdot G(z)$.

事実

- G_f : well-defined on $\mathbb{C}$.

ポテンシャル的.

- $\mu_f = dd^c G_f$.

- $\text{Supp } \mu_f$ は f の Julia 集合と一致.

- $\forall z \notin E(f)$.

$$\frac{1}{d^n} (f^n)^* \delta_z \rightarrow \mu_f \text{ weakly as } n \rightarrow \infty.$$

意味

μ_f は f による力学系のカオスを記述している.

$\leadsto f \in \mathcal{K}^* \Leftrightarrow \mu_f \in \mathcal{K}^* \Leftrightarrow G_f \in \mathcal{K}^*.$
対称.

事実

f : Hénon 写像の時も, μ_f が存在する.

$T=T=L$. $f^* \mu = \mu$ であり, μ は力学的 Green 関数

$$G_f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \max \{1, |f_1^n(z)|, |f_2^n(z)|\}$$

$$G_{f^{-1}}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \max \{1, |f_1^{-n}(z)|, |f_2^{-n}(z)|\}$$

の 2 つが定まる.

$\{$ 退化族が定まる $\mathcal{C}((t))$ 上の力学系.

$f_t(x, y) = (x^2 + a(t) - b(t)y, x)$. Hénon 写像の族.

$a(t), b(t): \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ 解析写像.

$t=0$ の周りで有理型関数, $b(t) \neq 0$.

$\leadsto a(t), b(t)$ は $t=0$ の周りで Laurent 級数展開

$$\begin{cases} a(t) = a_m t^m + a_{m+1} t^{m+1} + \dots & (m \in \mathbb{Z}) \\ b(t) = b_l t^l + b_{l+1} t^{l+1} + \dots & (l \in \mathbb{Z}) \end{cases} \text{ となる.}$$

$\mathbb{C}((t))$.

$\mathcal{C}((t)) = \left\{ \sum_{i \geq m} a_i t^i \mid a_i \in \mathbb{C} \right\}$ (形式的) Laurent 級数の集合と考える.

事実. $\mathcal{C}((t))$ は体.

$\left| \sum_{i \geq m} a_i t^i \right| = e^{-m}$ と定まると, $(\mathcal{C}((t)), |\cdot|)$ は

完備な非アキメテリック絶対値空間となる.

→ 収束・分散・議論223の2', $\mathbb{C}(t)$ 上力学系の漸近挙動が与えられる.

$a(t), b(t) \in \mathbb{C}(t)$ の元と見做す.

$f_t: \mathbb{C}(t)^2 \rightarrow \mathbb{C}(t)^2$. 自然に誘導.

↓ "Berkovich 降下化".

$f_{NA}: A_{\mathbb{C}(t)}^{2, an} \rightarrow A_{\mathbb{C}(t)}^{2, an}$. "誘導される $\mathbb{C}(t)$ の力学系"

この f_{NA} により $\mathbb{C}$ 上の力学系同様に. 力学的 Green 関数や
不変測度 を定めることが出来る (I. 2026+)

↳ $\mu_{NA} \in \mathbb{R}^+$.

{ hybrid space, hybrid dynamics.

hybrid space ... Boucksom - Favre - Jonsson の3名により

基礎理論が確立.

複素多様体の族の退化に適用

↓

Favre により力学系に應用.

(I. 2026) 説明

$\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \times \mathbb{D}^\times$: $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の自明族.

$f_t(z) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{D}^\times$:

Hénon 写像の族の作用.

~>

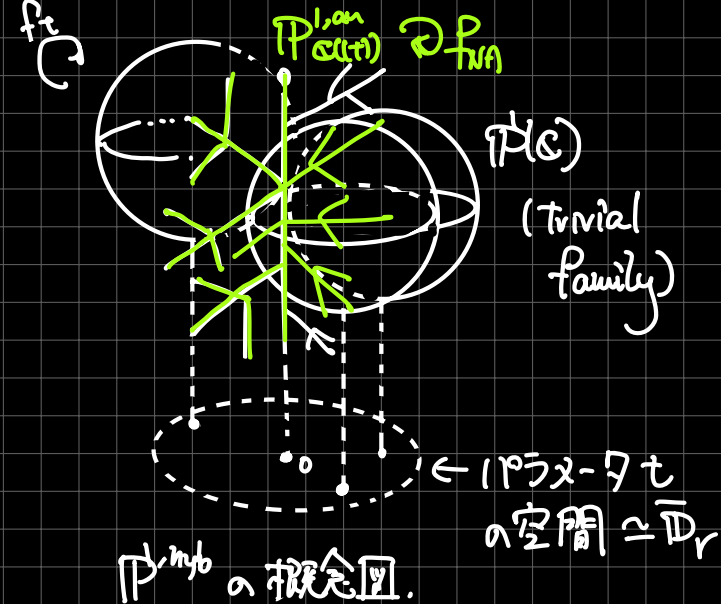
$f_{NA}(z) \in A_{\mathbb{C}(t)}^{2, an}$

誘導される $\mathbb{C}(t)$ 上の写像

↓

$f_{hyb}: A^{2, hyb} \rightarrow A^{2, hyb}$

$\{f_t\}$ と f_{NA} の関係 = " f_t は $t \rightarrow 0$ で f_{NA} に退化" を記述.



hybrid space

$= P^2 \times D^* \text{ (or } \mathbb{C}^2 \times D^*) \text{ などの自明族}$

$\forall t \rightarrow 0$ $z^1 \in C(t)$ の空間 (Berkovich sp.)

$P^{2,an}_{C(t)}$ (or $A^{2,an}_{C(t)}$) に退化する様子

を表したものの.

実際.

$\pi^{hyb}_0 \tau^{-1} : P^{2,hyb} \rightarrow \overline{D}_r$ proper surjection z^1 .

" $\overline{D}_r$ 上パラメータ t に対する空間の族" と考えると,

$\{\psi_t\}_{t \in \overline{D}_r}$: 同相写像の族 z^1 .

$$\begin{cases} \psi_0 : P^{2,an}_{C(t)} \xrightarrow{\sim} (\pi^{hyb})^{-1}(\tau(0)) \\ \psi_t : P^2(C) \times \{t\} \xrightarrow{\sim} (\pi^{hyb})^{-1}(\tau(t)) \quad t \neq 0. \end{cases}$$

と π に関する π 存在する.

{ 主定理 再考と. }

$$f_t(x, y) = (x^2 + a(t) - b(t)y, x) \text{ s.t.}$$

$$\begin{cases} a(t), b(t) : D^* \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorphic \& meromorphic at } 0 \\ b(t) \neq 0 \text{ on } D^*. \end{cases}$$

$\leadsto$ 各 $t \in D$ に対し, f_t の不変測度 μ_t が定まる.

$\leadsto \{f_t\}$ π $f_{NA} : A^{2,an}_{C(t)} \rightarrow A^{2,an}_{C(t)}$ と誘導.

$\&$ μ_{NA} : 不変測度 π 定まる.

i.e.

P_t : Hénon写像の
退化族

誘導.

P_{NA} : $\mathbb{C}(t)$ 上の
Hénon写像

μ_t : 不変測度の
族 / $\mathbb{C}^2$.

μ_{NA} : 不変測度
/ $A_{\mathbb{C}(t)}^{2,an}$

複素数の世界

$\mathbb{C}(t)$ の世界

hybrid space で同時に扱える.

Main Theorem

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\psi_t)_* \mu_t = (\psi_0)_* \mu_{NA}$$

" μ_t の退化極限が μ_{NA} になる".

Known Results

" μ_t " " μ_{NA} " を正に定義する $\mathbb{C}^2, \dots, \mathbb{C}^n$ も類似の問題が
ある.

Favre: $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上の正則写像. $\rightarrow$ cpt., global coord. あり

I. : $\mathbb{C}^2$ 上の (-退化) Hénon写像
 $\mathbb{C}^n$ Hénon-Sibony写像 } non-cpt.

$\mathbb{C}^3$ 曲面上の双曲自己同型写像. etc.

$\uparrow$ phase space も退化. global coord. あり.