

Oka Symposium 講演 超幾何的 $K3$ modular 函数

志賀弘典 (千葉大学理学研究科)

Dec. 16, 2012 奈良女子大学、 revised. Jan.18,2013

高木貞治「近世数学史談」に“書かれなかった楕円関数論”の一章がある。そこには、Gauss の超幾何函数、Jacobi の Theta 函数、Abel の虚数乗法の三幅対によって、あるべき楕円函数論の姿が整う、という記述がある。

高木の本には Klein の楕円函数論への言及はないが、Klein は種々の楕円 modular 函数を構成し、その各々が異なる応用を持っている。

$K3$ modular 函数においても、種々の構成とその応用がなされるべきであろう。本講演では、Klein 的観点から $K3$ modular 函数について、以下の構成に従って述べてゆく。

Part I : 古典的楕円 modular 函数論の総括

Part II: Klein-Fricke の楕円 modular 函数論とその応用例

Part III: $K3$ modular 函数の枠組と応用例その 1 (Picard modular 函数)

Part IV: Abel 曲面の modular 函数を $K3$ の視点で構成する (応用例その 2)

Part I 古典的楕円 modular 函数論の総括

1 楕円 modular 函数論の検討

$K3$ modular 函数の原型理論としての楕円 modular 函数を眺望し、検討すべきテーマを列挙する。

1.1 図式としての $K3$ modular 函数と楕円 modular 函数

楕円曲線の Legendre 標準形

$$w^2 = z(z-1)(z-\lambda) \quad (\lambda \in \mathbf{C} - \{0, 1\})$$

に対し、半周期

$$\begin{cases} \eta_1(\lambda) = \int_{-\infty}^0 \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\lambda)}} \\ \eta_2(\lambda) = \int_1^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\lambda)}} \end{cases}$$

をとり、 $\lambda \in (0, 1)$ において η_1 が負の虚部を持つ純虚数、 η_2 が正の実数となるように $\sqrt{z(z-1)(z-\lambda)}$ の枝を定める。これを元にして、解析接続によって

$$\Phi_0(\lambda) = \frac{\eta_2(\lambda)}{\eta_1(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbf{H}$$

を定める。その像は

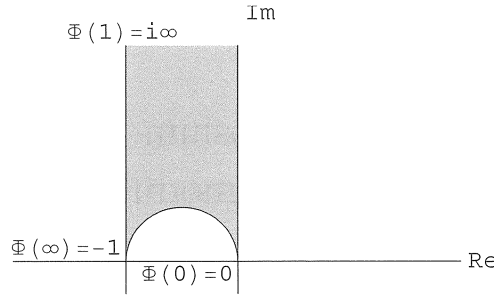


Figure 1.1

となる。さらに $\Lambda = \lambda \in \mathbf{C} - \{0, 1\}$ において解析接続を続けると多価関数となるが、上半平面、下半平面の像は次々、円弧三角形の辺に関する鏡映となって現れ、 \mathbf{H} を埋め尽くしてゆく。この拡張された多価周期写像を Φ で表す。偶数回鏡映の全体は

$$\Delta(\infty, \infty, \infty) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{Z}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2} \right\}$$

となり $\Gamma = SL(2, \mathbf{Z})$ の level 2 の主合同部分群 $\Gamma(2)$ が現れる。 $\eta_1(\lambda), \eta_2(\lambda)$ は Gauss 超幾何微分方程式

$$E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) : \lambda(1-\lambda)f'' + (1-2\lambda)f' - \frac{1}{4}f = 0 \quad (1.1)$$

の基本解であり、 $\Gamma(2)$ はこの基本解を基底として表現された微分方程式の monodromy 群である。射影 $\pi : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}/\Gamma(2)$ を経過すれば $\pi \circ \Phi$ は一価であり、逆写像 $\Phi^{-1} : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{P}^1$ (Schwarz inverse) は $\Gamma(2)$ に関する保型写像となっている。Jacobi の theta constants

$$\begin{cases} \vartheta_{00}(\tau) = 1 + 2\tilde{q} + 2\tilde{q}^4 + \cdots + 2\tilde{q}^{n^2} + \cdots, \\ \vartheta_{01}(\tau) = 1 - 2\tilde{q} + 2\tilde{q}^4 + \cdots + (-1)^n 2\tilde{q}^{n^2} + \cdots, \tilde{q} = e^{\pi i \tau}. \end{cases}$$

によって、逆写像は表示 $\lambda(\tau) = \frac{\vartheta_{01}^4(\tau)}{\vartheta_{00}^4(\tau)}$ を持つ。図式化して以下となる。

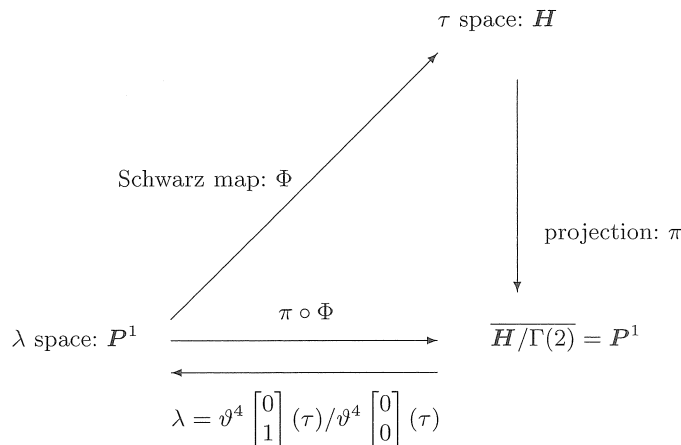


Diagram 1.1 (Schwarz map Φ and its inverse.)

我々が考察をしようとするのは、この図式における楕円曲線族を、さまざまな $K3$ 曲面族に置き換えた以下の図式である (図中、 G は \mathcal{D} に作用する monodromy 群)。

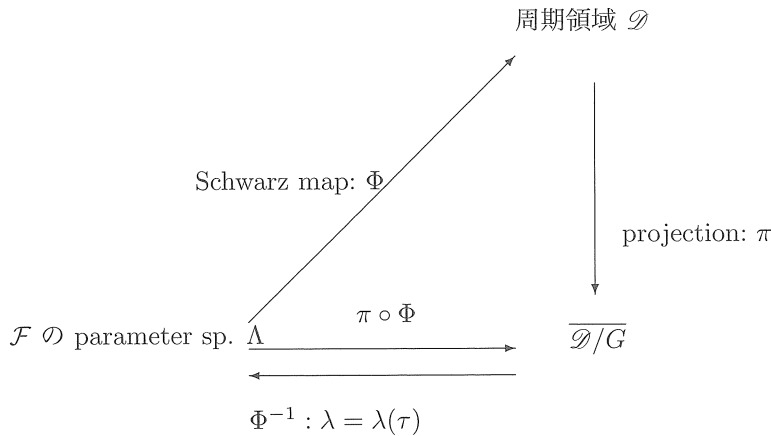


Diagram 1.2 (Schwarz map Φ and its inverse.)

1.2 楕円モジュラー関数の古典理論とその応用

$K3$ モジュラー関数という考えは古典的な楕円モジュラー関数の本歌取りである。この対比は 2次元射影空間における非特異3次曲線が楕円曲線である、のに対して 3次元射影空間における非特異4次曲面とその変形が $K3$ 曲面である、 という幾何学的なアナロジーを背景にしている。

では楕円モジュラー関数論は、何がその内容なのか？

0) 楕円曲線の modular 関数 $j(\tau)$ は、前記 $\lambda(\tau)$ を経由して

$$j(\tau) = 12^3 \frac{(1 + \lambda + \lambda^2)^3}{\lambda^2(1 - \lambda)^2}$$

で与えられる。これは $\Gamma \backslash \mathbf{H}$ と \mathbf{C} との 1:1 対応を与える、ここで $\Gamma = SL(2, \mathbf{Z})$ である。

1) (modular 関数による類体の構成) 虚2次体 $k = \mathbf{Q}(\sqrt{-d})$ に対して $k(j(\sqrt{-d}))/k$ は Hilbert の類体を与えている。 $k = \mathbf{Q}(\sqrt{-6})$ の場合。類数 $h = 2$ で $J_1 = [1, \sqrt{-6}]$, $J_2 = [2, \sqrt{-6}]$ が ideal 類代表。

$$\begin{cases} r_1 = j(\sqrt{-6}) = 4.83190790335133974539736629805 \times 10^6, \\ r_2 = j(\frac{\sqrt{-6}}{2}) = 3036.09664866025460263370195085. \end{cases}$$

から

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 4.834944000000000000000000000000 \times 10^6, \\ r_1 r_2 = 1.467013939200000000000000000000 \times 10^{10}, \\ D = (r_1 + r_2)^2 - 4r_1 r_2 = 2.331800292556800000000000000000 \times 10^{13} \\ = 23318002925568 = 2^{18} 3^6 13^2 19^2 \times 2. \end{cases}$$

よって

$$K = k(j(\sqrt{-6})) = k(\sqrt{D}) = k(\sqrt{2}) = k(\omega) \quad (\omega^3 = 1)$$

が Hilbert 類体。

2) Schneider の定理 ($\overline{\mathbf{Q}}$ 上の楕円曲線が、CM 点の j から特徴付けられる) : $\tau \in \mathbf{H}$ は $\overline{\mathbf{Q}}$ (= 代数的数の体) の変数とする。このとき $j(\tau) \in \overline{\mathbf{Q}} \implies \tau$ は虚二次の数。

3) (算術幾何平均定理) Gauss による定理: $0 < a, b$ に対しその算術幾何平均を $M(a, b)$ とする。 $0 < x < 1$ に対して

$$\frac{1}{M(1, x)} = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; 1 - x^2\right).$$

4) (Fourier 展開の係数の数論その 1) Ramanujan のタウ函数 (Weil 予想 1973 年解決)

5) (Fourier 展開の係数の数論その 2) Monster との関係 (Moonshine 予想 Borchards による解決)

6) 超幾何函数の特殊値の代数性の問題 (Wolfart の提起, Edixhoven-Yafaev による解決 [Wo], [E-Y])

7) 合同数問題の解決 (Tunnel (1983 年) [Tu], Hasse-Weil のゼータ函数を用い、BSD 予想を仮定する)。奇数の場合の判定:

$$\begin{aligned} \vartheta(\tau)\vartheta(2\tau)\vartheta(32\tau) - \frac{1}{2}\vartheta(8\tau) &= \frac{1}{2} + q + q^2 + 2q^3 + q^4 + 2q^6 + q^9 \\ &\quad - 2q^{10} - 2q^{11} - 4q^{14} - q^{16} - 4q^{17} + 3q^{18} - 2q^{19} - 4q^{20} + 2q^{22} - 3q^{25} - 6q^{26} - 4q^{30} + \dots \end{aligned}$$

を考える。ここで奇数冪が現れているものは $n = 1, 3, 9, 11, 17, 19, 25, \dots$ でこれらは非合同数、現れていない (係数が 0 になる) $n = 5, 7, 13, 15, 21, 23, \dots$ は合同数。

8) Klein 的 modular 函数論. Felix Klein は Fricke との共著の楕円 modular 函数論のテキスト ([K-F1],[K-F2]) において、各種の合同部分群に関する保型函数を theta 級数を用いて明示的に構成している。後に、これら一つ一つには、それぞれ異なった応用が見いだされ、楕円 modular 函数の影響圏の大きさを例証するものとなっている。 Γ は三角群 $\Delta(2, 3, \infty)$ であり、それは超幾何微分方程式は $E(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1)$ すなわち

$$x(1-x)y'' + (1 - (1 + \frac{1}{12} + \frac{5}{12})x)y' - \frac{1}{12} \frac{5}{12}y = 0$$

の monodromy 群と見られ、その解は $\int_1^\infty t^{-11/12}(t-1)^{-5/12}(t-x)^{-1/12} dt$ 等で与えられる。それらは、一見楕円曲線とは縁のない超幾何曲線

$$C(x) : u^{12} = t^{11}(t-1)^5(t-x)$$

の正則 1-form の周期である。つまり、楕円曲線族と族 $\{C(x)\}$ とは複素構造の変形族として同一視される。

Klein の modular 函数については、以下で再論したい。

2 K3 モジュラー函数の世界でできたこと、できなかったこと

0) $K3$ モジュラー函数を記述する一般的な Fourier 型展開ないしテータ表示が分かっている訳ではないが、後に述べる Picard モジュラーの場合をはじめとして、身近な具体例ではテータ函数を用いた表示が得られている。([HS5] 参照、また [MSY], [C-D],[Ko1], [Na], [Na] 等の結果はこの枠組の中にある。) これらは“Klein 的な意味の $K3$ modular 函数論”の一部をなしていると考えられる。

1) Shimura による Abel 多様体の虚数乗法論によって、幾つかの高次代数体の類体が $K3$ モジュラー函数の CM 値の添加で得られることは一般的に保証される。虚 2 次体の場合には、類体を得る添加元はモジュラー方程式で指定されるが、 $K3$ モジュラー函数の場合、そのような明示的なモジュラー方程式はまだ一つも得られていない。今後の課題であろう。([HS7] 参照)

2) 論文 [HS6] (修正版が [S-W]) で、満足すべき一般化が得られている。

3) [K-S], [K-S2],[M-S],[HS8] で、これまで得られていなかった 2 変数版での算術幾何平均定理は示された。これを攻撃の糸口にして、さらに大きな枠組で研究されるべきであろう。[M-T1], [M-T2] は現在知られている、一番大きな範疇で得られた算術幾何平均定理である。

4) 対応する問題自体が設定されていない。

5) $K3$ モジュラー函数ないしモジュラー形式の無限積展開を求める問題が生じる。Borchards, K. Yoshikawa (吉川謙一), N. Kondo (金銅誠之) らの研究がある。

- 6) Shimura 曲線、さらには一般の Shimura 多様体上での保型形式論および CM 点の考察が必要になる。
- 7) 3 次元合同数問題は $K3$ 曲面上の有理点の問題とが結びついてくる。
- 8) Klein 的 $K3$ modular 関数が各種展開されている。
- 9) その他各種の幾何学的なディオファントス問題が $K3$ 曲面と関連している。

Part I 文献

References

- [Ha] [3] 原田耕一郎、モンスターの数学, 数学 51(1), pp. 34-
- [Tak] [4] 高木貞治、近世数学史談、岩波文庫 (青 939.1)
- [Ga0] [5] C.F. Gauss, Mathematisches Tagebuch 1796-1814, Ostwalds Klassiker 256, Leipzig, 1976.
- [Ha] [6] Helmut Hasse, Neue Begründung der komplexen Multiplikation. Erster Teil: Einordnung in die allgemeine Klassenkörpertheorie, Journal für die reine und angewandte Mathematik , Volume: 157(1927), page 115-
- [Tu] [7] Tunnell, Jerrold B. (1983). "A classical Diophantine problem and modular forms of weight $3/2$ ". *Inventiones Mathematicae* 72 (2): 323-334.
- [BvVZ] [8] Bruinier, van der Veer, Harder, Zagier, The 1-2-3 of Modular Forms : Lectures at a Summer School in Nordfjordeid, Norway (Universitext),(2008),Springer.
- [E-Y] [1] Edixhoven, B. and Yafaev, A. , Subvarieties of Shimura varieties. *Annals of Mathematics*, 157 (2).(2003), pp. 621-645.
- [Wo] [2] Jürgen Wolfart, Werte Hypergeometrisches Funktionen, *Inventiones mathematicae* Volume: 92(1988), page 187-216.

Part II: Klein-Fricke の楕円 modular 函数論とその応用例

3 合同部分群に関する保型形式と保型関数

本節では以下の記号を用いる:

$$\Gamma = SL(2, \mathbb{Z}),$$

for a positive integer N ,

$$\Gamma(N) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : g \equiv id \pmod{N} \right\},$$

$$\Gamma_0(N) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : g \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{N} \right\},$$

$$\Gamma_1(N) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : g \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\},$$

Γ' : a congruence subgroup i.e. it holds $\Gamma(N) \subset \Gamma' \subset \Gamma$, for some positive integer N ,

$F(\Gamma')$: fundamental region for Γ' ,

$F = F(\Gamma) = F_1 \cup F_2$: fundamental region for Γ ($F_1 = F \cap \{\operatorname{Re} z \geq 0\}$, $F_2 = F \cap \{\operatorname{Re} z \leq 0\}$),

$$\mu = [\overline{\Gamma} : \overline{\Gamma'}],$$

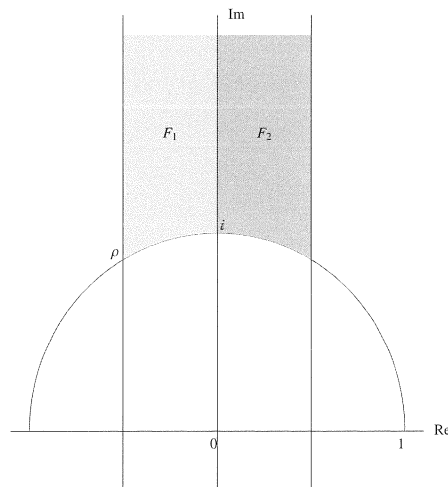
t : number of equivalence classes of cusps for Γ' ,

g : genus of $\Gamma' \backslash \overline{H}$.

ここで、 $\overline{\Gamma}$ は Γ' を射影一次変換群と見たものを表す。 $\Gamma' \backslash H$ の各点は複素 torus (= 楕円曲線) の正則同型類を指定し、この意味での moduli 空間である。上に挙げた各種の Γ の部分群 Γ' による商空間 $\Gamma' \backslash H$ は、それぞれに、楕円曲線に何らかの付加構造を指定して、より細かな基準で楕円曲線の同型類を考えた moduli 空間である。したがって、このような moduli 空間上の modular 函数は、この細密化された楕円曲線の parameter を与えるものと思われる。

3.1 基本領域と Cusps

上記の modular 群 Γ' に対し H における Γ' 同値となる点たちの代表をまとめた図形を基本領域と呼び $F(\Gamma')$ で表す。 Γ の基本領域は図 Figure 1 で与えられ、 F を 2 つの円弧三角形 F_1, F_2 に二分して考える。



Fundamental region for Γ

商空間 $\Gamma \backslash \mathbf{H}$ for Γ の compact 化を行う。

$$\overline{\mathbf{H}} = \mathbf{H} \cup \{i\infty\} \cup \mathcal{Q}.$$

とし、 $\overline{\mathbf{H}} - \mathbf{H}$ の点は cusps と呼ばれる。 Γ は cusp 全体に推移的に作用する。つまり cusp の集合は唯一の Γ 軌道からなる。部分群 Γ' も cusp の集合に作用するが一般に軌道は幾つかに分かれそれは推移的ではない。

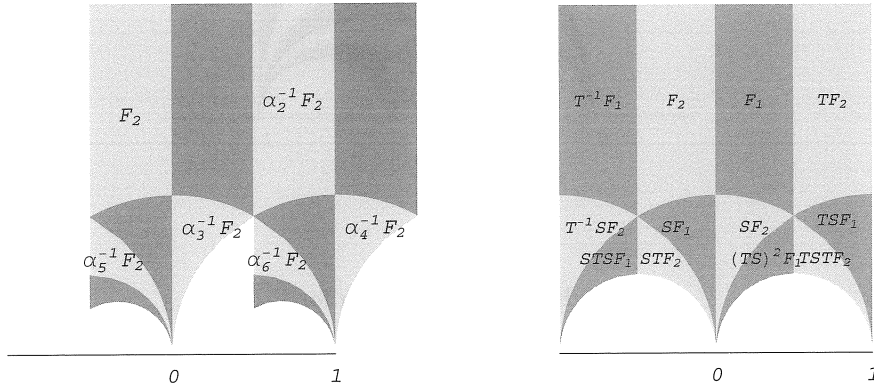
Proposition 3.1. Γ' を Γ の指数有限の部分群で $[\overline{\Gamma} : \overline{\Gamma}'] = n$ とする。 $\{a_1, \dots, a_n\}$ を左剰余類の完全代表系として、剰余類分解

$$\overline{\Gamma} = \bigsqcup_{i=1}^n \alpha_i \overline{\Gamma}'$$

を考える。このとき $F' = \bigcup_{i=1}^n \alpha_i^{-1} F$ は Γ' の基本領域となる。

Example 3.1. $\Gamma' = \Gamma(2)$ の場合。 $SL(2, \mathbf{Z})/\Gamma(2) \cong SL_2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \cong S_3$ であり、 $[\Gamma, \Gamma(2)] = [\overline{\Gamma}, \overline{\Gamma}(2)] = 6$ となる。以下が剰余類の完全代表系である：

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}, \quad \alpha_2 = T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ \alpha_3 &= S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}, \quad \alpha_4 = (TS)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ \alpha_5 &= (ST)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}, \quad \alpha_6 = (TST)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}. \end{aligned}$$



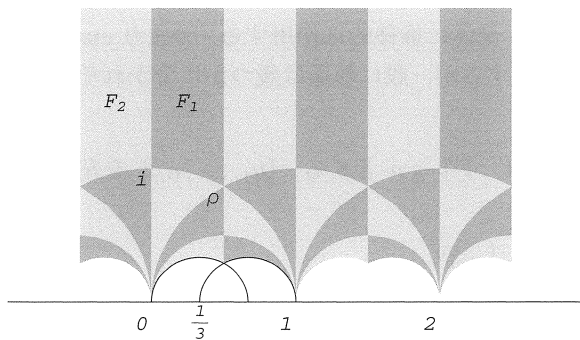
Fundamental region for $\Gamma(2)$

Proposition 3.2.

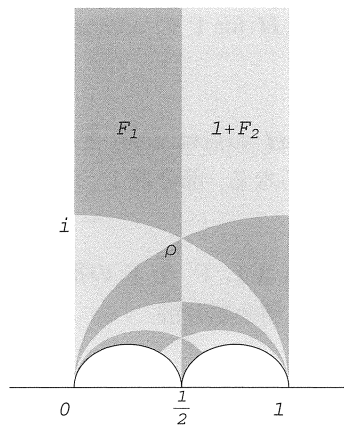
$$t = \frac{\mu(N)}{N} \quad \text{for } \Gamma' = \Gamma(N).$$

name	μ	genus	ν_i	ν_ρ	t	isomorphic
$\Gamma(2)$	6	0	0	0	3	\mathfrak{S}_3
$\Gamma(3)$	12	0	0	0	4	\mathfrak{A}_4 : tetrahedral group
$\Gamma(4)$	24	0	0	0	6	\mathfrak{S}_4 : octahedral group
$\Gamma(5)$	60	0	0	0	12	\mathfrak{A}_5 : icosahedral group
$\Gamma(6)$	72	1	0	0	12	
$\Gamma(7)$	168	3	0	0	24	Klein's max. aut. gr.
.

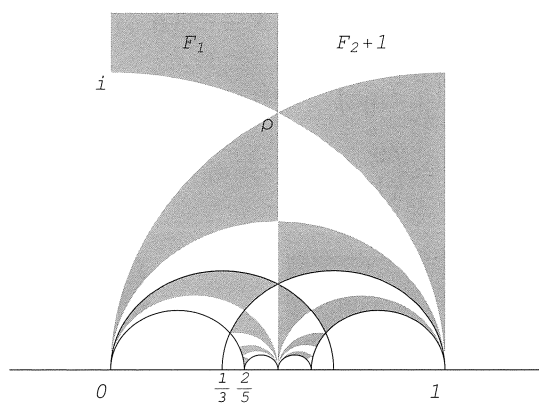
Table for $\Gamma(N)$



Fundamental region for $\overline{\Gamma(3)}$,



and for $\overline{\Gamma_0(4)} = \overline{\Gamma_1(4)}$



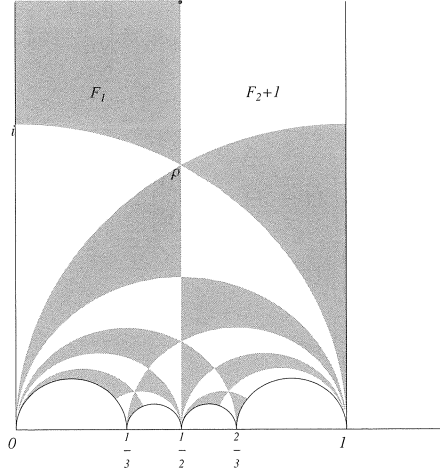
Fundamental region for $\overline{\Gamma_1(5)}$

以下の代表類から $\Gamma_1(3) = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ の基本領域が作られる :

$$IF_1, TSF_1, (TS)^2F_1, TSTF_1, TF_2, SF_2, TSTF_2, ST^{-1}F_2.$$

$\Gamma_1(4) = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ の基本領域が以下で得られる :

$$IF_1, TSF_1, (TS)^2F_1, TSTF_1, TST(TS)F_1, TST(TS)^2F_1, \\ TF_2, SF_2, TSTF_2, ST^{-1}F_2, ST^{-1}(ST)F_2, ST^{-1}(ST)^2F_2.$$



Fundamental region for $\overline{\Gamma_1(6)}$

name	μ	genus	t	isomorphic	$d_k(k \geq 2)$	$e_2(=g)$	$e_k(=d_k - t), k \geq 4$
$\Gamma(2)$	6	0	3	\mathfrak{S}_3	$k/2 + 1$	0	$k/2 - 2$
$\Gamma(3)$	12	0	4	\mathfrak{A}_4	$k + 1$	0	$k - 3$
$\Gamma(4)$	24	0	6	\mathfrak{S}_4	$2k + 1$	0	$2k - 5$
$\Gamma(5)$	60	0	12	\mathfrak{A}_5	$5k + 1$	0	$5k - 11$
$\Gamma(6)$	72	1	12		$6k$	1	$6k - 12$
$\Gamma(7)$	168	3	24		$14k - 2$	3	$14k - 26$
.	.	.	.				

Table for $\Gamma(N)$

name	μ	(ν_i, ν_ρ, t)	genus	coincidence	d_2	$d_k(k \geq 4)$	$e_1(=g)$	$e_k(=d_k - t)$
$\overline{\Gamma_1(2)}$	3	(1,0,2)	0	$\overline{\Gamma_0(2)}$		$k/2 + 1$	0	
$\overline{\Gamma_1(3)}$	4	(0,1,2)	0	$\overline{\Gamma_0(3)}$		$[2k/3] + 1$	0	
$\overline{\Gamma_1(4)}$	6	(0,0,3)	0	$\overline{\Gamma_0(4)}$		$k + 1$	0	
$\overline{\Gamma_1(5)}$	12	(0,0,4)	0			$2k + 1$	0	
$\overline{\Gamma_1(6)}$	12	(0,0,4)	0	$\overline{\Gamma_0(6)}$		$2k + 1$	0	
.	.	.	.					

Table for $\Gamma_1(N)$

4 Jacobi の Theta constants と $\Gamma(2)$ modular 函数

Definition 4.1. $a, b \in \{0, 1\}$ に対して、以下で *Jacobi theta constant* を定義する。これらは H で正則で、以下でのべる保型性を持つ。

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (\tau) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \exp[\pi i(n + \frac{a}{2})^2 \tau + 2\pi i(n + \frac{a}{2})\frac{b}{2}], \quad a, b \in \{0, 1\}$$

$\tilde{q} = \exp[\pi i \tau]$. を用いて以下の Fourier 展開となる:

$$\vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\tau) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \tilde{q}^{n^2}, \quad \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (\tau) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} (-1)^n \tilde{q}^{n^2}, \quad \vartheta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} (\tau) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \tilde{q}^{(n+\frac{1}{2})^2}.$$

Remark 4.1. *Jacobi's identity*): $\vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^4(\tau) = \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^4(\tau) + \vartheta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^4(\tau)$.

Theorem 4.1. (保型挙動)

$$\begin{aligned} \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(\tau+1) &= \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(\tau), \quad \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(\tau+1) = \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(\tau), \quad \vartheta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(\tau+1) = \exp\left[\frac{\pi i}{4}\right] \vartheta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(\tau), \\ \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\left(\frac{-1}{\tau}\right) &= \exp\left[\frac{-\pi i}{4}\right] \sqrt{\tau} \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(\tau), \\ \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\left(\frac{-1}{\tau}\right) &= \exp\left[\frac{-\pi i}{4}\right] \sqrt{\tau} \vartheta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(\tau), \\ \vartheta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\left(\frac{-1}{\tau}\right) &= \exp\left[\frac{-\pi i}{4}\right] \sqrt{\tau} \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(\tau) \quad (\sqrt{\tau} \in \mathbf{H}). \end{aligned}$$

We note here the above inversion formula is equivalent to the reflection formula of the Riemann *zeta* function via "Mellin transformation". 上の保型性から

[Facts]

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^4(\tau) \in M_2(\Gamma(2)), \quad (a, b \in \{0, 1\})$$

$$M(\Gamma(2)) = \mathcal{C}[\vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^4(\tau), \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^4(\tau)].$$

5 Klein-Fricke による、幾つかの $\Gamma_1(n)$ に関する modular 関数の表示

本節では Klein-Fricke のテキストに述べられている $\Gamma_1(n)$ の modular 関数を紹介する。この合同部分群に関する保型関数の明示的記述が、この分厚いテキストの核心部分ではないかと私は思っている。Klein-Fricke における記号：

$$\begin{aligned} \omega = \tau \in \mathbf{H}, r = q = e^{2\pi i \tau} \\ \vartheta_3(z, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z] \\ \vartheta_0(z, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[\pi i n^2 \tau + 2\pi i n(z + 1/2)] \\ \vartheta_2(z, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[\pi i (n + 1/2)^2 \tau + 2\pi i (n + 1/2)z] \\ \vartheta_1(z, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[\pi i (n + 1/2)^2 \tau + 2\pi i (n + 1/2)(z + 1/2)] \end{aligned}$$

5.1 $\Gamma_1(3)$ の modular 関数

Klein p.375 の表記 ($\tau \in \mathbf{H}, q = e^{2\pi i \tau}$ として)

$$\xi(\tau) = \frac{2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m (6m+1) q^{(6m+1)^2/24}}{3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m (2m+1) q^{3(2m+1)^2/8}} \quad (5.1)$$

は $\Gamma(3)$ に関する modular 関数で $\xi(0) = 1, \xi(i\infty) = \infty, \xi(1) = e^{2\pi i/3}, \xi(-1) = e^{4\pi i/3}, \xi(\frac{\sqrt{3}+i}{2\sqrt{3}}) = \xi(\frac{-\sqrt{3}+i}{2\sqrt{3}}) = \xi(\frac{2\sqrt{3}+i}{2\sqrt{3}}) = 0$. $\xi^3(\tau)$ が $\Gamma_1(3)$ に関する modular 関数を与える。

5.2 cubic case の Schwarz 写像

代数曲線族

$$w^3 = z(z-1)(z-\lambda)^2, \quad (\lambda \in \mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\})$$

を考える。とりあえず $\lambda \in (0, 1)$ のときに

$$\eta_1 = \int_{-\infty}^0 \frac{dz}{w} = \int_{-\infty}^0 \frac{dz}{\sqrt[3]{z(z-1)(z-\lambda)^2}}, \quad \eta_2 = \int_1^{\infty} \frac{dz}{w} = \int_1^{\infty} \frac{dz}{\sqrt[3]{z(z-1)(z-\lambda)^2}}$$

とする。 $z \in \mathbf{H}$ のときの w の分枝は $\lim_{z \rightarrow +\infty} \arg w = 0$ によって定める。以下楕円曲線のとときと同様、 \mathbf{H} 上に解析接続して、周期写像 Φ をつくる。

$\Phi(\mathbf{H})$ は Figure 5.1 のようになり、縮小回転 $\tau = \frac{1-\omega}{3}\Phi(\lambda)$ によって \mathbf{H} の像は Figure 5.2 のように τ 平面の半平面における非ユークリッド三角形になる、ここで $\omega = \exp[2\pi i/3]$ 。

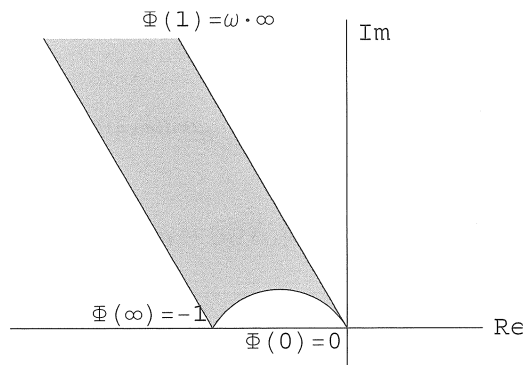


Figure 5.1

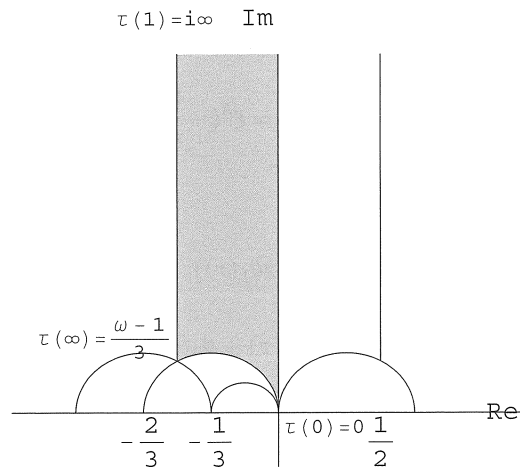


Figure 5.2

この形状から第 2 節と同様の議論で以下が導かれる。

Proposition 5.1. $E\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$ の projective monodromy 群は三角群 $\Delta(\infty, \infty, 3)$ で、

$$\Gamma_1(3) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{Z}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{3} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

に一致する。

5.3 cubic case \mathcal{T} の isogeny formula

Definition 5.1.

$$\begin{cases} \theta_0(\tau) = \sum_{\mu \in \mathcal{Z}[\omega]} q^{N(\mu)} = \sum_{m,n \in \mathcal{Z}} (e^{2\pi i \tau/3})^{m^2 - mn + n^2}, \\ \theta_1(\tau) = \sum_{\mu \in \mathcal{Z}[\omega]} e^{2\pi i(m+n)/3} q^{N(\mu)} = \sum_{m,n \in \mathcal{Z}} e^{2\pi i(m+n)/3} (e^{2\pi i \tau/3})^{m^2 - mn + n^2}, \\ q = \exp[2\pi i \tau/3], N(\mu) = \mu\bar{\mu}, \mu = m + n\omega \end{cases}$$

によって *cubic theta constants* を定める。

上の theta constants は Gauss case \mathcal{T} の

$$\begin{cases} \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^2(\tau) = \sum_{\mu \in \mathcal{Z}[i]} q^{N(\mu)}, \\ \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^2(\tau) = \sum_{\mu \in \mathcal{Z}[i]} e^{2\pi i(m+n)/2} q^{N(\mu)}, \\ q = \exp[2\pi i \tau/2], N(\mu) = \mu\bar{\mu}, \mu = m + ni \end{cases}$$

に完全に対応していることにも注意しておく。

Theorem 5.1. (cubic case \mathcal{T} の theta 表示) 本節の λ および τ に対して

$$\lambda(\tau) = \frac{\theta_0^3(\tau)}{\theta_1^3(\tau)}.$$

Remark 5.1. ここに現れた *cubic* λ 関数は、上記 Klein の $\Gamma_1(3)$ modular 関数とは以下の関係がある：

$$\lambda(\tau) = \xi^3\left(-\frac{1}{\tau}\right).$$

Theorem 5.2. (cubic case \mathcal{T} の isogeny formula)

$$\begin{cases} \theta_0(3\tau) = \frac{1}{3}(\theta_0(\tau) + 2\theta_1(\tau)), \\ \theta_1^3(3\tau) = \frac{1}{3}\theta_1(\tau)(\theta_0^2(\tau) + \theta_0(\tau)\theta_1(\tau) + \theta_1^2(\tau)). \end{cases}$$

Remark 5.2. level 2 の場合には以下の良く知られた *isogeny formula* が成り立つ：

$$\begin{aligned} \vartheta_{00}^2(2\tau) &= \frac{1}{2}(\vartheta_{00}^2(\tau) + \vartheta_{01}^2(\tau)) \\ \vartheta_{01}^2(2\tau) &= \vartheta_{00}(\tau)\vartheta_{01}(\tau). \end{aligned}$$

したがって、算術幾何平均操作が *theta* 関数の変数の 2 倍操作で実現されて行く。このことが Gauss の算術幾何平均定理

$$\frac{1}{AGM(1, x)} = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\lambda)}} = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right) \quad (\lambda = 1 - x^2)$$

を導いている。同様に、上記 *cubic isogeny formula* (Thm 5.2) は *Bowein* 兄弟による変形された算術幾何平均定理を導く。(超幾何関数早春学校 [Sh] 参照)

5.4 $\Gamma_1(4)$ の modular 函数

Klein p.379 に次の函数が示されている (以下いつも $\omega = \tau \in \mathbf{H}, r = e^{2\pi i\tau}$):

$$\mu(\omega) = r^{-1/4} \frac{\vartheta_3(0, r^2)}{\vartheta_3(\omega, r^2)} = \frac{\sum_{m=-\infty}^{\infty} r^{m^2}}{\sum_{m=-\infty}^{\infty} r^{(2m-1)^2/4}}. \quad (5.2)$$

$\mu(\tau)$ は $\Gamma(4)$ 不変かつ cusp 6 点での境界値 $\mu(1\infty) = \infty, \mu(0) = 1, \mu(1) = i, \mu(2) = -1, \mu(3) = i, \mu(n + 1/2) = 0$ となり、 $\Gamma(4)$ modular 函数であることが分かる。 $\mu(\tau)^4$ は同じく境界値 $0, 1, \infty$ を取る $\Gamma_1(4)$ modular 函数である。

5.5 $\Gamma(5)$ の modular 函数

Klein p.383 の表記

$$\zeta(\omega) = r^{-3/10} \frac{\vartheta_1(\omega, r^5)}{\vartheta_1(2\omega, r^5)} = r^{1/5} \frac{\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m r^{(5m^2+3m)/2}}{\sum_{m=-\infty}^{\infty} r^{(5m^2+m)/2}}.$$

[正 20 面体群と 5 次方程式の解析的解法]

正 20 面体群 \mathcal{I} は 5 次交代群 \mathfrak{A}_5 と同型であり、かつ $\Gamma/\Gamma(5)$ と同型である。 \mathcal{I} に関する不変式環は 3 つの生成元 $f(z), H(z), T(z)$ を持ち

$$\Phi(z) = \frac{1}{12^3} \frac{H(z)^3}{f(z)^5}$$

が不変有理関数である。 f は 12 次、 H は 20 次の多項式で、与えられた Z に対して 60 次の代数方程式 $\Phi(z) = Z$ を正 20 面体方程式と呼ぶ。Klein は 5 次方程式を解くために、この正 20 面体方程式を補助方程式として用いた。つまり、5 次方程式一般より、この 60 次方程式の方が容易であり、代数的操作で正 20 面体方程式から一般 5 次方程式の解を求めることができる。したがって、Klein の議論においては、正 20 面体方程式の解をいかに求めるかが本質的であった。

それは、 $j(\tau)$ を導く Gauss 超幾何微分方程式の Schwarz 写像と、上記 $\Gamma(5)$ modular 函数 $\zeta(\tau)$ を用いて以下の図式から容易に決定される。

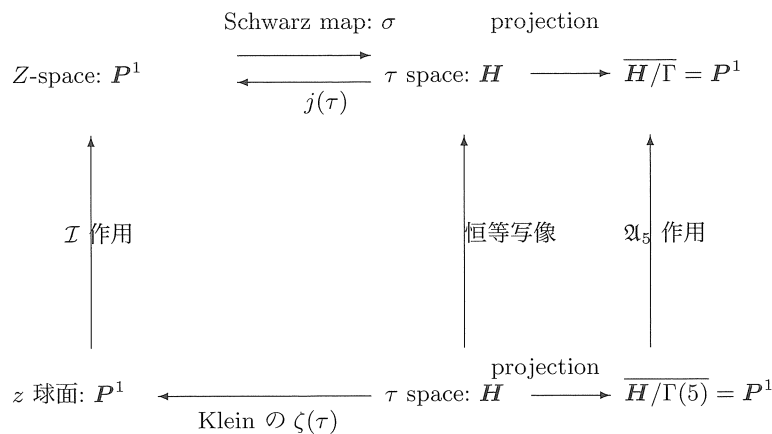


Diagram 1.1 Klein の $\zeta(\tau)$ と正 20 面体方程式の解

5.6 $\Gamma_1(6)$ の modular 函数

Klein p.391 に

$$y(\omega) = \frac{\vartheta_2^2(r)}{\vartheta_2^2(r^3)} \quad (5.3)$$

が見いだされる。実際の $\Gamma_1(6)$ modular 関数は

$$s(\tau) = \frac{\vartheta_2^4(3\tau)}{\vartheta_2^4(\tau)}$$

で与えられ、4 個の cusps での境界値は $s(0) = 1/9, s(\frac{1}{3}) = 1, s(\frac{1}{2}) = \infty, s(\infty) = 0$ である。 $s(\tau)$ (および $\Gamma_1(6)$ modular form) を用いて $\zeta(3)$ の積分表示を示すことが出来る。Peters によって、楕円型 $K3$ 曲面の 1-parameter family

$$z^2 = 4tuv(1-u)^2(1-v)^2 + (u(1-v)t - v(1-u))^2$$

との関連が指摘されている ([B-P], [Pe] 参照)。

5.7 $\Gamma(7)$ の modular 関数

Klein p.394 には

$$(z_1 : z_2 : z_4) = \left(- \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m r^{\frac{(14m+5)^2}{56}} : \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m r^{\frac{(14m-1)^2}{56}} : \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m r^{\frac{(14m+3)^2}{56}} \right)$$

が挙げられている。表示自身も究極的なものとは思われない。別の視点から考察を加えるべきものかも知れない。Klein 曲線、例外型の surface singularity とその変形として現れる $K3$ 曲面族、Belyi の定理、などに関連があり興味深いのが、浅学でまだ勉強中である。

[Part II 文献]

References

- [Ap] P. Appell, *Sur les Fonctions hypergéométriques de plusieurs variables les polynomes d'Hermite et autres fonctions sphériques dans l'hyperspace*, Gauthier-Villars, Paris, 1925.
- [Mu] D. Mumford, *Tata Lectures on Theta I, (II, III)*, Birkhäuser.
- [Kl] F. Klein, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, III, Springer 1923.
- [K-F1] F. Klein and R. Fricke, *Vorlesungen über die Theorie der Elliptischen Modulfunctionen*, Erster Band, Especially II,6, p.p. 344 - 399, Teubner, 1892.
- [K-F2] F. Klein and R. Fricke, *Vorlesungen über die Theorie der Elliptischen Modulfunctionen*, Zweiter Band, Especially "Fünfter Abschnitt, Viertes Kapitel", Teubner, 1892.
- [Ka] Y. Kawada, *Theory of modular functions of one variable*, Seminary Note, Univ. Tokyo, 1964 (in Japanese)
- [B-P] F. Beukers and C. Peters, *A family of $K3$ surfaces and $\zeta(3)$* , *Crelle J.*, 351(1984), 42-54.
- [Pe] C. Peters, *Monodromy and Picard-Fuchs equations for families of $K3$ surfaces and elliptic curves*, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 4 (Ser. 19)(1986), 583-607.
- [Sh] 超幾何関数早春学校、北大数学講究録 110(2006), 35-51.

Part III: Picard 曲面の $K3$ modular 函数

6 一般的情况設定

正則切断を持つ代数的楕円曲面は以下の表示を持つ：

$$w^2 = y^3 + P(x)y + Q(x). \tag{6.1}$$

われわれはいつも (6.1) をその極小非特異 model S と同一視する. $\Delta = 4P(x)^3 + 27Q(x)^2$ とおく. π で標準射影 $(x, y, w) \mapsto x$ を表す. $\text{Ord}_a(P), \text{Ord}_a(Q), \text{Ord}_a(\Delta)$ で $P(Q, \Delta)$ の $x = a$ での零点の位数を表す. 必要なら fiber を保つ双有理変換によって、以下を仮定することが出来る：

(*) : 各点 $x = a$ で同時に $\text{Ord}_a(P) \geq 4, \text{Ord}_a(Q) \geq 6$ となることはない.

Proposition 6.1. 仮定 (*) の下で曲面 S が $K3$ 曲面となるのは

$$\begin{cases} \deg(P) \leq 8, \deg(Q) \leq 12 \text{ が同時に成り立ち、} \\ 5 \leq \deg(P) \text{ または } 7 \leq \deg(Q) \end{cases} \tag{6.2}$$

となるとき、そのときのみである。

条件 (6.2) + (*) は等式 $\chi(S) = \Delta(S) = 24$ を導くことに注意する.

このときの方程式 (6.1) をわれわれは、(大域切断を持つ代数的) 楕円 $K3$ 曲面の Kodaira normal form と呼ぶ.

Remark 6.1. 楕円 $K3$ 曲面 S の Kodaira normal form (6.1) に対し、

$$\bar{w}^2 = \bar{y}^3 + \bar{x}^8 P(1/\bar{x})\bar{y} + \bar{x}^{12} P(1/\bar{x}) \tag{6.3}$$

によって、 S の $x = \infty$ における表示を得る. $\bar{P} = \bar{x}^8 P(1/\bar{x}), \bar{Q} = \bar{x}^{12} P(1/\bar{x})$ とおいて Δ の $\bar{x} = 0$ への接続を得る. われわれは常に $P(x), Q(x), \Delta$ を、この意味の接続とともに考慮する.

Remark 6.2. 楕円 $K3$ 曲面 S の Kodaira normal form (6.1) において、 $\pi^{-1}(a)$ が特異 fiber となるのは $\Delta(a) = 0$ のときそのときに限られる. つねに Δ は次数 24 の多項式である. 特異 fiber $\pi^{-1}(a)$ の型は $(\text{Ord}_a(P), \text{Ord}_a(Q), \text{Ord}_a(\Delta))$ によって以下の表のように決定される：

no.	$\text{Ord}_a(P)$	$\text{Ord}_a(Q)$	$\text{Ord}_a(\Delta)$	type	singularity
1)	0	0	b	$I_b (b \geq 1)$	A_{b-1}
2)	2	3	$b + 6$	$I_b^* (b \geq 1)$	D_{4+b}
3)	≥ 1	1	2	II	nonsingular
4)	≥ 2	2	4	IV	A_2
5)	≥ 3	4	8	IV*	E_6
6)	≥ 4	5	10	II*	E_8
7)	1	≥ 2	3	III	A_1
8)	3	≥ 5	9	III*	E_7
9)	≥ 2	3	6	I_0^*	D_4
9')	2	≥ 4	6	I_0^*	D_4

なお、 $\text{Ord}_a(\Delta)$ は $\pi^{-1}(a)$ のオイラー数となっている.

われわれは、以下で、このような Kodaira normal form で与えられた (もしくは与えることが可能な) 楕円 $K3$ 曲面の族を与えて、その modular 函数を構成する. Kodaira normal form は、1 変数での Klein 的 modular 函数における超幾何曲線族に対応するものである.

[周期と Riemann-Hodge 関係式、Torelli 型定理]

$K3$ 曲面は単連結かつ、定数倍を除いて一意な holomorphic 2- form φ を持つ。 $K3$ 曲面 S において $H_2(S, \mathbf{Z})$ は、交点形式を通じて内積を持つ格子となり、つねに $E_8(-1) \oplus E_8(-1) \oplus U \oplus U \oplus U$ と同型で、階数 22, 符号数は $(3, 19)$ である。これを $K3$ lattice と呼ぶ。このうち、divisor たちで生成される部分格子を $\text{Pic}(S)$ その直交補空間を $\text{Tr}(S)$ で表す。それぞれは、符号数 $(1, *)$, $(2, **)$ である。

$H_2(S, \mathbf{Z})$ の基底 C_1, \dots, C_{22} に対し $\tilde{\eta} = (\int_{C_1} \varphi : \dots : \int_{C_{22}} \varphi)$ をその周期 (ベクトル) という。 $A = (C_i \cdot C_j)$ とすると、Riemann-Hodge の周期関係式

$$\tilde{\eta} A^{-1t} \tilde{\eta} = 0, \tilde{\eta} A^{-1t} \tilde{\eta} > 0$$

が成り立つ。 $C \in \text{Pic}(S)$ に対して $\int_C \varphi = 0$ なので、 $\text{Tr}(S)$ の基底 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ に対してその交点行列を B とする。 $\text{Tr}(S)$ の双対基底 $\Gamma_1^*, \dots, \Gamma_r^*$ ($\Gamma_i \cdot \Gamma_j = \delta_{ij}$) によって

$$\eta = \left(\int_{\Gamma_1^*} \varphi : \dots : \int_{\Gamma_r^*} \varphi \right)$$

とすると、上記の関係式は

$$\eta B^t \eta = 0, \eta B^t \eta > 0 \quad (*)$$

に簡約される。

上記 B を有する $K3$ 曲面の族に対して、一定の偏極 (marking) すなわち楕円 fibering π を指定して (このとき $\text{Pic}(S)$ が固定される)、 $\text{Tr}(S)$ の基底 $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_r\}$ とともに、三つ組み $(S, \pi, \{\Gamma_1, \dots, \Gamma_r\})$ の族をつくり、一斉に周期を取るとその写像は単射となる。また、この marking は R-H 関係によって IV 型の有界対称領域 (*) を定めるが、この領域の各点は、この marking を持つ $K3$ 曲面の周期点である。階数 r が小さければ、このときの modular 群は、射影化された直交群 $PO(B, \mathbf{Z})^+$ に一致する。

7 Picard modular 函数とその応用

7.1 楕円 $K3$ 曲面族 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_P$ の周期写像

Kodaira normal form で与えられた楕円 $K3$ 曲面

$$\begin{cases} S(\lambda) = S(\lambda_1, \lambda_2) : z^2 = y^3 + x^2(x-1)^2(x-\lambda_1)^2(x-\lambda_2)^2 \\ \cong \{z^2 = y^3 + x^2(x-\xi_0)^2(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2\} \\ \xi \in \Xi = \{[\xi_0 : \xi_1 : \xi_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbf{C}) : \xi_0 \xi_1 \xi_2 (\xi_0 - \xi_1)(\xi_1 - \xi_2)(\xi_2 - \xi_0) \neq 0\} \\ (\lambda_1, \lambda_2) = (\xi_1/\xi_0, \xi_2/\xi_0) \end{cases} \quad (7.1)$$

の族 \mathcal{F} を考える。 $\pi : (x, y, z) \mapsto x$ とする。

$S(\lambda)$ は singular composition $4IV + IV^*$ で $a_0 = 0, a_1 = \lambda_1, a_2 = \lambda_2, a_3 = 1, a_5 = \infty$ に対し $\pi^{-1}(a_i) (i = 1, 2, 3, 4)$ が s type IV fiber, $\pi^{-1}(a_5)$ が s IV^* fiber である。

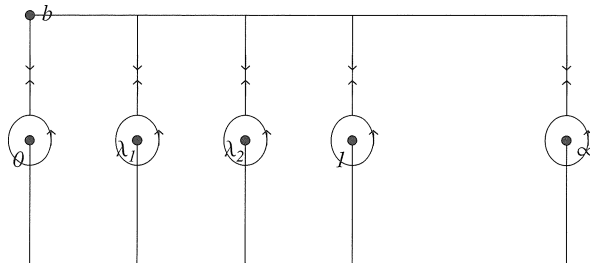


Figure 3.1: singular fiber of $S(\lambda)$

Reference surface $S_0 = S(1/3, 2/3)$ を固定し、 λ は $(1/3, 2/3)$ の近傍に限って以下考察する。base point $(x =) b = i$ での fiber elliptic curve の $H_1(\pi^{-1}(b), \mathbf{Z})$ の basis $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ を $\gamma_1 \cdot \gamma_2 = 1$ となるもので位数 3

の自己同型 $r : (x, y, z) \mapsto (x, \omega y, z)$ によつて $r^2(\gamma_1) = \gamma_2$ となるものを取ることが出来る。記号 $\omega = e^{2\pi i/3}$ は今後も一貫して使用する。

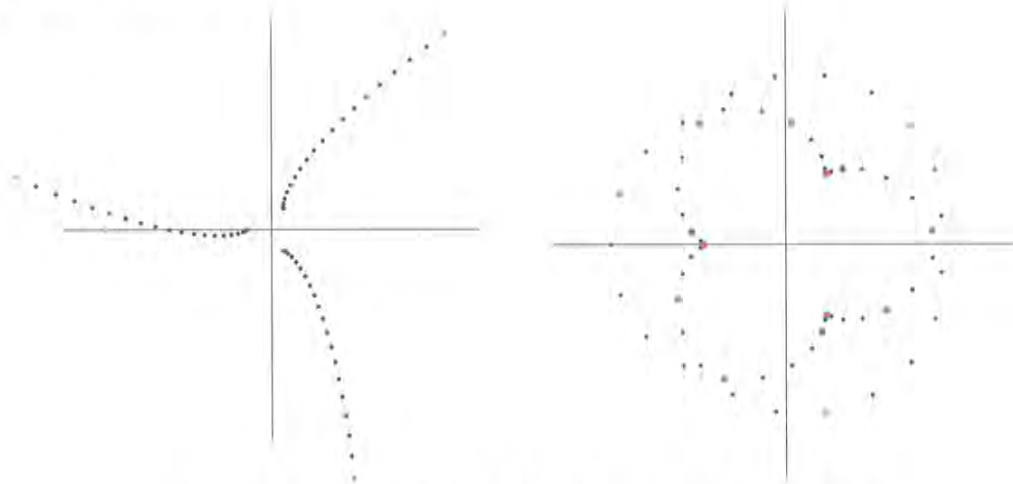
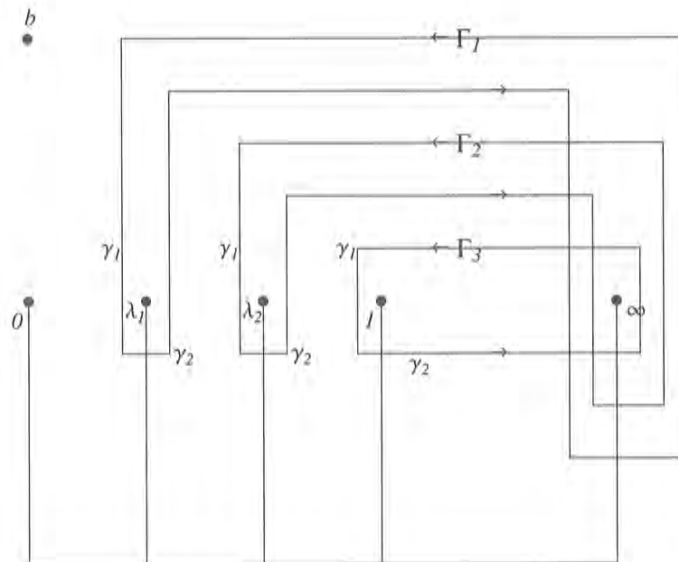


Figure 3.1: $x = b$ から $x = 1/6$ への変形、および δ_1 による変形

b から各 a_i に向かい、その周囲を一周する closed src δ_i を取り、 δ_i に沿つて fiber を追跡すると、支点 b に戻ったときに $H_1(\pi^{-1}(b), \mathbb{Z})$ の基底の変換 M_i を生じる、これらを左作用で記述すると

$$M_0 = M_1 = M_2 = M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M_0^{-1} \quad (7.2)$$

である。Reference surface $S_0 = S(1/3, 2/3)$ における generic transcendental lattice の基底 $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_6\}$ が図のように取れる。



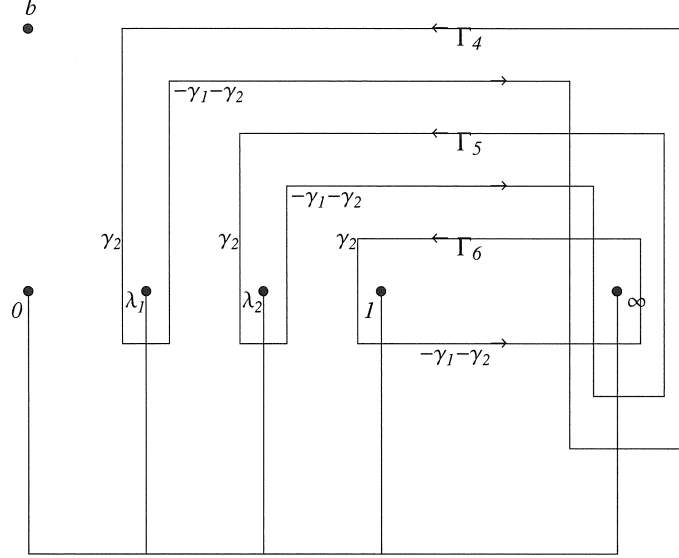


Figure4.2: A system of transcendental cycles on S_0

交点行列 $A = (\Gamma_i \cdot \Gamma_j)$ は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

S_0 の周期積分を

$$\check{\eta}_{i-1} = \int_{\Gamma_i} \varphi \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (7.4)$$

で定める。 φ は S_0 の unique holomorphic 2-form である。 γ_1, γ_2 の性質と Γ_i の構成から $\Gamma_{i+3} = r^2(\Gamma_i)$ したがって

$$\check{\eta}_{i+3} = \omega^2 \check{\eta}_i \quad (7.5)$$

が成り立つ。すると、Riemann-Hodge の周期関係式 $\check{\eta} A^t \check{\eta} = 0$ は自明となり、 $\check{\eta} A^t \bar{\check{\eta}} > 0$ は

$$\begin{cases} (\check{\eta}_0, \check{\eta}_1, \check{\eta}_2) B_1^t (\bar{\check{\eta}}_0, \bar{\check{\eta}}_1, \bar{\check{\eta}}_2) > 0 \\ B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\omega \\ -1 & -1 & -1 \\ -\omega^2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (7.6)$$

と言い換えられる。さらに、変換

$$\begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega^2 \\ \omega & 1 & \omega^2 \\ \omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \check{\eta}_0 \\ \check{\eta}_1 \\ \check{\eta}_2 \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

によって、周期関係式は

$$(\eta_0, \eta_1, \eta_2) B_0^t (\bar{\eta}_0, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2) > 0, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。したがって $u = \eta_1/\eta_0, v = \eta_2/\eta_0$ とすると、正規化された周期領域 (超球)

$$\mathcal{D} = 2 \operatorname{Re}(v) + |u|^2 < 0 \subset \mathbb{C}^2 \quad (7.8)$$

を得る。ここで $\lambda \in \Xi$ を動かし、われわれは、解析接続によって得られる多価写像

$$\Phi_P = \Phi : \Xi \rightarrow \mathcal{D}, \Phi(\lambda_1, \lambda_2) = (\eta_1 : \eta_2 : \eta_3)$$

を定め、 \mathcal{F} に対する周期写像ということにする。

7.2 周期写像 Φ_P の性質

Picard modular 群

$$\Gamma = \{g \in \operatorname{GL}_3(\mathbb{Z}[\omega]) : {}^t \bar{g} H g = H\}$$

とその合同部分群

$$\Gamma(\sqrt{-3}) = \{g \in \Gamma : g \equiv I_3 \pmod{(\sqrt{-3})}\}$$

を定める。元 $g = \begin{pmatrix} p_0 & q_0 & r_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{pmatrix} \in \Gamma$ は \mathcal{D} に

$$g(u, v) = \left(\frac{p_1 + q_1 u + r_1 v}{p_0 + q_0 u + r_0 v}, \frac{p_2 + q_2 u + r_2 v}{p_0 + q_0 u + r_0 v} \right) \quad (7.9)$$

で作用が定まる。超球 \mathcal{D} の Siegel upper half space \mathfrak{S}_3 への埋め込み $\Omega : \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{S}_3$ を

$$\Omega(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{u^2 + 2\omega^2 v}{1 - \omega} & \omega^2 u & \frac{\omega u^2 - \omega^2 v}{1 - \omega} \\ \omega^2 u & -\omega^2 & u \\ \frac{\omega u^2 - \omega^2 v}{1 - \omega} & u & \frac{\omega^2 u^2 + 2\omega^2 v}{1 - \omega} \end{pmatrix}, \quad (7.10)$$

で与えることが出来る。有理数の characteristics $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{Q}^3$ に対して Riemann theta constant

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (\Omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \exp[\pi i(n+a)\Omega^t(n+a) + 2\pi i(n+a)^t b],$$

を定める。ここで Ω は \mathfrak{S}_3 を動く変数である。われわれは以下の theta constant のみを用いる。

$$\vartheta_k(u, v) = \vartheta \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 0 \\ k/3 & 1/6 & k/3 \end{bmatrix} (\Omega(u, v)) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}[\omega]} \omega^{2k \operatorname{Tr}(\mu)} H(\mu u) q^{N(\mu)} \quad (7.11)$$

ここで $k \in \{0, 1, 2\}$, また $\operatorname{Tr}(\mu) = \mu + \bar{\mu}$, $N(\mu) = \mu \bar{\mu}$,

$$H(u) = \exp\left[\frac{\pi}{\sqrt{3}} u^2\right] \vartheta \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \end{bmatrix} (u, -\omega^2), \quad q = \exp\left[\frac{2\pi}{\sqrt{3}} v\right].$$

Fact 7.1.

(0) 周期 $\eta_i(\lambda_1, \lambda_2) (i = 0, 1, 2)$ は Appell の 2 変数超幾何微分方程式 $E(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)$ の基本解である。その射影 monodromy 群は $\Gamma(\sqrt{-3})/\langle 1, \omega, \omega^2 \rangle$ である。

(i) 周期写像 Φ は ξ -space の compact 化 \mathbb{P}^2 から $\mathcal{D}/\Gamma(\sqrt{-3})$ の Satake compact 化 $\overline{\mathcal{D}/\Gamma(\sqrt{-3})}$ への双正則写像に自然に拡張される。

(ii) theta 写像 $\Lambda : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{P}^2$ を

$$\Lambda([\eta_0, \eta_1, \eta_2]) = [\vartheta_0(u, v)^3, \vartheta_1(u, v)^3, \vartheta_2(u, v)^3] \quad (7.12)$$

で定めると周期写像 Φ の逆写像となっている。

その他、monodromy 群の生成元、 $\eta_i(\lambda_1, \lambda_2)$ の保型挙動、 Φ による境界対応、 $\Gamma(\sqrt{-3})$ に関する保型形式環の構造、が得られている。

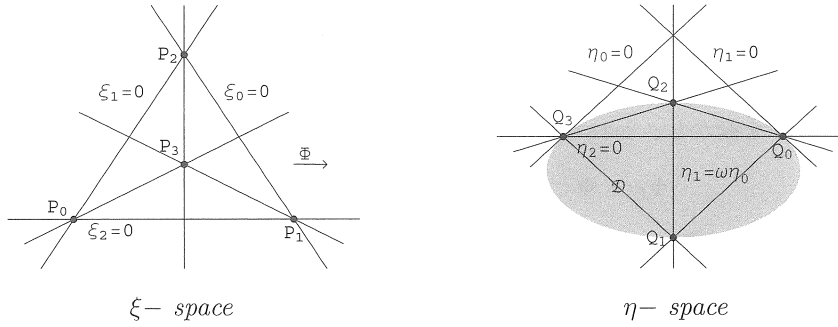


Figure 2. Correspondence between ξ space and \mathcal{D}

7.3 逆写像 Φ_P^{-1} の応用

応用として、2変数算術幾何平均定理、2変数 Jacobi type formula, discriminant 6 の quaternion algebra を持つ Shimura curve の記述、周期領域上の CM 点から有限体上の Picard 曲線上の有理点を構成した代数曲線暗号、 $Q(\sqrt{-3})$ 上の 3 次 Galois 拡大体 F 上の類体の構成 (抽象論として) および Schneider 型定理が得られている。

ここでは、2変数算術幾何平均定理について述べることにする。

7.4 古典的 Gauss 算術幾何平均定理

以下を復習する。楕円曲線

$$E(\lambda) : w^2 = z(z-1)(z-\lambda), \quad \lambda(\lambda-1) \neq 0.$$

において real parameter λ を実区間 $(0, 1)$ 上にとり、 λ で定まる周期の比

$$\tau = \int_1^\infty \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\lambda)}} \Big/ \int_{-\infty}^0 \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\lambda)}} \quad \text{with } \frac{\tau}{i} > 0$$

を作る。 τ から λ への逆写像の表示

$$\lambda(\tau) = \frac{\vartheta_{01}^4(\tau)}{\vartheta_{00}^4(\tau)} \tag{7.13}$$

に注意しておく。ここで用いられる theta constants は

$$\begin{cases} \vartheta_{00}(\tau) = 1 + 2\tilde{q} + 2\tilde{q}^4 + 2\tilde{q}^9 + \dots \\ \vartheta_{01}(\tau) = 1 - 2\tilde{q} + 2\tilde{q}^4 - 2\tilde{q}^9 + \dots, \quad \tilde{q} = \exp[\pi i \tau] \end{cases}$$

であった。Gauss の算術幾何平均定理とは等式

$$\frac{1}{M(1, x)} = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; 1-x^2\right) \tag{7.14}$$

のことである。ここで $M(a, b)$ は 2 正数 a, b の算術平均幾何平均操作 $(a, b) \mapsto ((a+b)/2, \sqrt{ab})$ を繰り返し行った極限を表す。右辺は Gauss 超幾何関数である。Gauss は 1799 年の日記帳 ([98], ..., [102], 30 Mai, ..., 23 Dez, 1799) にこの発見について驚きを持って記している。Jacobi 全集 (p.235) に以下の奇妙な公式が述べられている：

Theorem 7.1. (7.13) の下で

$$\vartheta_{00}^2(\tau) = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; 1-\lambda\right) = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-(1-\lambda))}}. \tag{7.15}$$

Jacobi の公式から theta constants の isogeny formula を経過して、Gauss の算術幾何平均定理を（容易に）導くことが出来る。Isogeny formula (the duplication formula):

$$\begin{cases} \vartheta_{00}^2(2\tau) = \frac{1}{2} (\vartheta_0^2(\tau) + \vartheta_{01}^2(\tau)), \\ \vartheta_{01}^2(2\tau) = \vartheta_{00}(\tau)\vartheta_{01}(\tau), \end{cases}$$

変数 x を $x = \vartheta_{01}^2(\tau)/\vartheta_{00}^2(\tau)$ で与える。すると、isogeny formula は算術幾何平均操作を実現しているから

$$\vartheta_{00}^2(\tau)M(1, x) = M(\vartheta_{00}^2(\tau), \vartheta_{01}^2(\tau)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (\vartheta_{00}^2(2^n \tau) + \vartheta_{01}^2(2^n \tau)) = 1.$$

したがって $\vartheta_{00}^2(\tau)M(1, x) = 1$ となり、これが算術幾何平均定理である！われわれの $K3$ modular 関数を用いて、この定理の 2 変数版への拡張を得ることが出来る。

7.5 Φ_P の逆写像を用いた 2 変数算術幾何平均定理

3 つの正数 a, b, c に対して

$$\begin{cases} a' = \frac{1}{3}(a + b + c), \\ b'^3 + c'^3 = \frac{1}{3}(a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2), \\ b'^3 - c'^3 = \frac{1}{3\sqrt{-3}}(a - b)(b - c)(c - a). \end{cases}$$

によって新しい算術幾何平均操作 $\psi : (a, b, c) \mapsto (a', b', c')$ を定義する。3 乗根を取るときに複素数が現れるが $\psi^2(ab, c)$ は再び正数の三つ組とすることができる。こうして算術幾何平均関数

$$M_3(a, b, c) := \lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n(a, b, c)$$

を定めることが出来る。われわれの算術幾何平均定理は以下のように述べられる：

Theorem 7.2. Three terms AGM theorem

$$\frac{1}{M_3(1, x, y)} = F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1; 1 - x^3, 1 - y^3\right), \quad (|x| < 1, |y| < 1). \quad (7.16)$$

これは isogeny formula :

$$\begin{cases} \vartheta_0(\sqrt{-3}u, 3v) = \frac{1}{3}(\vartheta_0 + \vartheta_1 + \vartheta_2), \\ \vartheta_1^3(\sqrt{-3}u, 3v) + \vartheta_2^3(\sqrt{-3}u, 3v) = \frac{1}{3}(\vartheta_0^2\vartheta_1 + \vartheta_1^2\vartheta_2 + \vartheta_2^2\vartheta_0 + \vartheta_0\vartheta_1^2 + \vartheta_1\vartheta_2^2 + \vartheta_2\vartheta_0^2), \\ \vartheta_1^3(\sqrt{-3}u, 3v) - \vartheta_2^3(\sqrt{-3}u, 3v) = \frac{1}{3\sqrt{-3}}(\vartheta_0 - \vartheta_1)(\vartheta_1 - \vartheta_2)(\vartheta_2 - \vartheta_0), \end{cases}$$

周期写像 Φ_P の逆写像の表示：

$$(\lambda_1, \lambda_2) = \left(\frac{\vartheta_1(u, v)^3}{\vartheta_0(u, v)^3}, \frac{\vartheta_2(u, v)^3}{\vartheta_0(u, v)^3} \right), \quad (7.17)$$

それを用いた Jacobi type 公式

Theorem 7.3. (A Jacobi type formula in two variables)

$$\vartheta_0(u, v) = C_0 F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1; 1 - \lambda_1, 1 - \lambda_2\right), \quad (7.18)$$

$$C_0 = \vartheta \left[\begin{matrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{matrix} \right] (-\omega^2),$$

ここで $F_1(a, b, b', c; \lambda_1, \lambda_2)$ は Appell 超幾何関数

$$F_1(a, b, b', c; \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{m, n \geq 0} \frac{(a, m+n)(b, m)(b', n)}{(c, m+n)m!n!} \lambda_1^m \lambda_2^n \quad (7.19)$$

$$(a, n) = \begin{cases} a(a+1)\cdots(a+n-1) & \text{for } n > 0, \\ 1 & \text{for } n = 0, \end{cases}$$

を経由して、古典的な場合と同じ議論が出来る ([K-S], [M-S])。

7.6 Klein の $\Gamma(3)$ modular 函数との関連

$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ の場合 $u = 0$ となり周期領域は $v = -i\tau$ として $\text{Im}(\tau) > 0$ となる。 $\vartheta_0(0, -i\tau) = \theta_0(\tau)$, $\vartheta_1(0, -i\tau) = \theta_1(\tau)$ となり、Borweins 兄弟が与えた変形算術幾何平均定理 ([B-B]) が、上記 Thm 7.2 の制限として現れている。

[Part III 文献]

References

- [Ap] P. Appell, *Sur les Fonctions hypergéométriques de plusieurs variables les polynomes d'Hermite et autres fonctions sphériques dans l'hyperspace*, Gauthier-Villars, Paris, 1925.
- [B-B] J.M. Borwein and P.B. Borwein, *A cubic counterpart of Jacobi's identity and the AGM*, Trans. Amer. Math. Soc., **323** (1991), no. 2, 691–701.
- [D-M] P. Deligne and G.D. Mostow, *Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy*, I.H.E.S. Pub. Math., **63**(1986),5–89.
- [Ga] C. F. Gauss, *Hundert Thoreme Über die Neuen Transscendenten (in Gauss Werke III)*, Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1866.
- [Ja] C.G.J. Jacobi, *Gesammelte Werke I*, Chelsea, New York, 1969.
- [Mu] D. Mumford, *Tata lectures on Theta I*, Birkhäuser, Stüttgart, 1982.
- [Pi] E. Picard, *Sur les fonctions de deux variables indépendantes analogues aux fonctions modulaires*, Acta math., **2**(1883), 114–135.
- [Te] T.Terada, *Fonctions hypergéométriques F_1 et fonctions automorphes. I*, J. Math. Soc. Japan, **35**(1983),451–475.

超幾何的 $K3$ modular 函数 Part IV

8 序論

複素構造の変形の観点からみれば、主偏極付き Abel 曲面全体 \mathcal{X}_A は Kummer 曲面の全体 \mathcal{F}_K と同一視され、さらに、ある種の marking 付き $K3$ surface 全体 \mathcal{F}_0 と同一視される。これら三者の族を moduli 空間のコンパクト化と整合する明示的な parameter によって表示し、それらの parameter を、対応する周期領域上の保型函数として書き下し、さらにその応用を示すことは、Klein 的な意味において、楕円保型函数論の真の拡張を与えるものと考えられる。また、実 2 次体 k の作用を持つ p.p. Abelian surface 全体 \mathcal{X}_{A_k} に関しても同様の問題が提起される。本節では、この問題に対して、最近の Abhinav Kumar, Clingher-Doran および Atsuhira Nagano によって得られた結果を参照しつつ、部分的解答を提示してゆく。

8.1 abelian surface と Hodge equivalent な $K3$

主偏極付き Abel 曲面全体 \mathcal{X}_A は正規化された 1-form の周期行列の空間 \mathfrak{S}_2 上に並んでいる。他方、2-form の周期行列の空間は IV 型領域となり、 \mathbf{P}^4 における半 2 次超曲面

$$\mathcal{D}_{B_0} = \{\eta = (\eta_1 : \dots : \eta_5) \in \mathbf{P}^4 : \eta B_0 {}^t \eta = 0, \eta B_0 {}^t \bar{\eta} > 0\}^+$$

with

$$B_0 = \langle -2 \rangle \oplus U \oplus U$$

で与えられる（+ は条件 $\text{Im } \eta_2 > 0$ を表す）。

Remark 8.1. *Abelian surface* の 2-cycles は 6 個あるがそれらは 4 個の 1-cycles の外積で、2-forms の周期に対しては、周期行列の対称性から $\eta_1 = \eta_6$ のような自明な 1 次関係式が現れる。従って周期 η_6 を考察から除外できる。

1-forms の周期 $\begin{pmatrix} g & h \\ h & g' \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_2$ と $(\eta_1 : \dots : \eta_5) \in \mathcal{D}_{B_0}$ との対応は、 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{pmatrix}$ の $(2, 2)$ 小行列式をならべて

$$\omega : \begin{pmatrix} g & h \\ h & g' \end{pmatrix} \mapsto (h : g : g' : h^2 - gg' : 1)$$

で与えられる。このとき

$$\text{Im} \begin{pmatrix} g & h \\ h & g' \end{pmatrix} > 0 \iff \text{Im } \eta_2 > 0, \eta B_0 {}^t \bar{\eta} > 0$$

である。さらに、対応 ω は自然に modular 群の間の同型

$$Sp(4, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} PO^+(B_0, \mathbf{Z})$$

を引き起こす。

一般に、代数的 $K3$ 曲面 S において、 $H_2(S, \mathbf{Z})$ は交点形式による内積によって、符号数 $(3, 19)$ の even unimodular 格子 $L_{K3} = E_8(-1) \oplus E_8(-1) \oplus U \oplus U \oplus U$ と同型である。このうち divisor によって生成される sublattice $\text{Pic}(S)$ は符号数 $(1, *)$ その直交補空間 $\text{Tr}(S)$ は符号数 $(2, **)$ となる。

generic に $\text{Tr}(S) \cong B_0$ すなわち $\text{Pic}(S) \cong L_0 = E_8(-1) \oplus E_7(-1) \oplus U = B_0^\perp$ となる $K3$ 曲面の族 \mathcal{F}_0 を考え、適当な楕円 fibering によって marking を定める。このとき Torelli 型定理によって、 \mathcal{F}_0 はその周期を通して \mathcal{D}_{B_0} の上の変形族と考えることが出来る。

したがって、 \mathcal{X}_A と \mathcal{F}_0 はともに \mathcal{D}_{B_0} を周期領域とし、この意味で互いに Hodge equivalent な family である。

8.2 $\sqrt{5}$ 作用を持つ Abel 曲面族と Hodge equivalent な $K3$ 曲面族

判別式 Δ の実 2 次体 k の実乗法を持つ p.p. abelian surfaces の族は上半平面の直積 H^2 を周期領域とし modular 群は $\langle SL(2, \mathcal{O}_k), \iota \rangle$ である (ただし、 ι は H^2 の成分の交換、 \mathcal{O}_k は k の整数環)。この領域は \mathfrak{S}_2 において Humbert surface

$$ag + bh + cg' + d(h^2 - gg') + e \cdot 1 = 0$$

として埋め込まれ $\Delta = b^2 - 4ac - 4de$ である。(cf. van der Geer [VG], [H-M] p.283 also)

$\Delta = 5$ の場合、Humbert surface は、上記の対応 ω によって \mathcal{D}_{B_0} における超平面切断として $g-h-g' = 0$ で与えられる。以上のことから、実乗法 $\sqrt{5}$ を持つ abel 曲面においては B_0 の代わりに、その sublattice $B_H := U \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ が現れる。よって $\text{Tr}(S) = B_H$ となる $K3$ 曲面族 \mathcal{F}_H が、 $\sqrt{5}$ の実乗法を持つ abelian surfaces の族 \mathcal{X}_H と Hodge equivalent である。

9 2 つの楕円 $K3$ 曲面族

9.1 Clingher-Doran の楕円 $K3$ 曲面族 \mathcal{F}_{CD}

Clingher-Doran は [C-D] で、以下の楕円型 $K3$ 曲面族 \mathcal{F}_{CD} を考察している：

$$S = S(\alpha, \beta, \gamma, \delta) : y^2 = x^3 + (-3\alpha t^4 - \gamma t^5)x + (t^5 - 2\beta t^6 + \delta t^7). \quad (9.1)$$

その generic member S では $\text{Pic}(S) = E_8(-1) \oplus E_7(-1) \oplus U$ 、楕円曲面としての singular composition は $II^* + 5I_1 + III^*$ である (Fig.4.1)。彼らによって、抽象的な族 \mathcal{F}_0 は \mathcal{F}_{CD} によって明示されることになった。

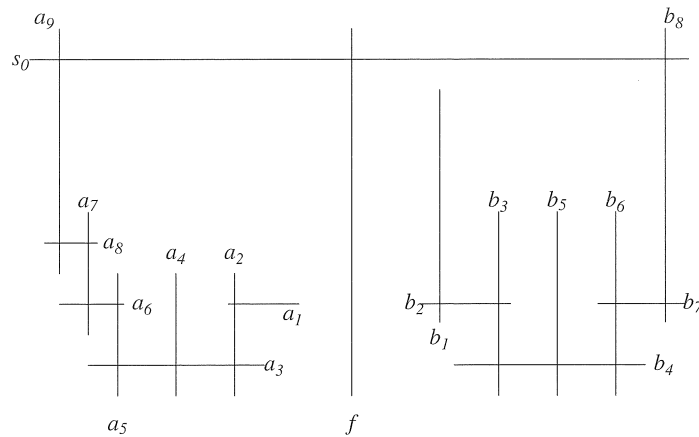


Fig. 4.1: Picard lattice of $S(b, c)$

Humbert surface の考察から \mathcal{F}_L は \mathcal{F}_{CD} の部分族になっているはずである。

Theorem 9.1. 曲面 $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathcal{F}_0$ が実乗法 $\sqrt{5}$ を持つ条件は

$$(-\alpha^3 - \beta^2 + \delta)^2 - 4\alpha(\alpha\beta - \gamma)^2 = 0. \quad (9.2)$$

Remark 9.1. 楕円曲面 $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ は $\gamma = \delta = 0$ のときのみ有理曲面で、それ以外ははすべて楕円 $K3$

曲面である。また、parameter space の singular locus は

$$\begin{aligned} C : & \gamma(-23328\alpha^6\beta\gamma^3 + 46656\alpha^3\beta^3\gamma^3 - 23328\beta^5\gamma^3 - 3888\alpha^5\gamma^4 + 97200\alpha^2\beta^2\gamma^4 \\ & + 33750\alpha\beta\gamma^5 + 3125\gamma^6 - 34992\alpha^7\gamma^2\delta + 69984\alpha^4\beta^2\gamma^2\delta - 34992\alpha\beta^4\gamma^2\delta + 184680\alpha^3\beta\gamma^3\delta \\ & + 48600\beta^3\gamma^3\delta + 37125\alpha^2\gamma^4\delta + 71928\alpha^4\gamma^2\delta^2 + 68040\alpha\beta^2\gamma^2\delta^2 - 27000\beta\gamma^3\delta^2 + 11664\alpha^6\delta^3 \\ & - 23328\alpha^3\beta^2\delta^3 + 11664\beta^4\delta^3 - 46656\alpha^2\beta\gamma\delta^3 - 48600\alpha\gamma^2\delta^3 \\ & - 23328\alpha^3\delta^4 - 23328\beta^2\delta^4 + 11664\delta^5) = 0 \end{aligned}$$

である。 $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \notin C$ のとき楕円曲面 $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ の singular composition は、 $II^* + 5I_1 + III^*$ である。

Remark 9.2. $S(b, c)$ と $S(b'c')$ が楕円 $K3$ 曲面として同型となるのは 2 種類の C^* 作用 $(y, z) \mapsto (y', z') = (k^2y, k^3z)$, $x \mapsto x' = mx$ の軌道にあるときのみである。従って、 \mathcal{F}_0 の moduli 空間の compact 化が、1 点添加による、重み付き 3 次元射影空間 $P(2, 3, 5, 6)$ であることが、楕円曲線の場合と同様の考察から分かる。

9.2 Nagano の $\sqrt{5}$ action を持つ楕円 $K3$ 曲面族 \mathcal{F}_N

Theorem 9.2. (Nagano [Na3]) 実乗法 $\sqrt{5}$ を持つ Abel 曲面族から得られる Kummer 曲面族 \mathcal{F}_H は

$$Z_N(A, B, C) : w^2 = (u^2 - 2y^5)(u - (5Ay^2 - 10By + C)), \quad (9.3)$$

の族 \mathcal{F}_N として実現される。係数 A, B, C は、それぞれ周期領域 $H \times H$ 上の weight 2, 6, 10 の対称 Hilbert modular form によって明示的に記述される。明示的に構成された \mathcal{F}_H の周期写像は parameter space の compact 化 $P(1, 3, 5)$ と $H \times H / \langle SL(2, \mathcal{O}_k), \iota \rangle$ の一点 compact 化との間の正則同型を与える。ここで \mathcal{O}_k は $Q(\sqrt{5})$ の整数環、 ι は $H \times H$ の成分の交換による involution.

10 4 次 Kummer 曲面の古典理論

10.1 種数 2 の曲線と対応する Kummer 曲面

種数 2 の曲線の標準形

$$\begin{cases} C(\lambda) = C(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) : y^2 = x(x-1)(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3), \\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \Lambda = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in C^3 : \lambda_i \notin \{0, 1\}, \lambda_i \neq \lambda_j\} \end{cases}$$

から出発する。 $\lambda_0 = (-0.6, -0.3, 0.6)$ とおき、 $C_0 = C(\lambda_0)$ を reference 曲線と呼ぶことにする。 $H_1(C_0, \mathbb{Z})$ の symplectic 基底 $\{A_1, A_2, B_1, B_2\}$ を Fig. 4.2 で与える。交点行列は $J = \begin{pmatrix} O & I_2 \\ I_2 & O \end{pmatrix}$ である。

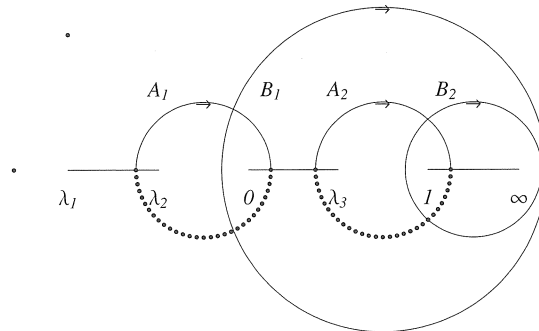


Fig.4.2: Homology cycles of C_0

reference 曲線の正則 1-form の基底を $\{\omega_1 = \frac{dx}{y}, \omega_2 = \frac{x dx}{y}\}$ で与える。

$$\begin{pmatrix} \Omega_2 \\ \Omega_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{B_1} \omega_1 & \int_{B_1} \omega_2 \\ \int_{B_2} \omega_1 & \int_{B_2} \omega_2 \\ \int_{A_1} \omega_1 & \int_{A_1} \omega_2 \\ \int_{A_2} \omega_1 & \int_{A_2} \omega_2 \end{pmatrix}$$

とすると、正規化された周期行列は以下で与えられる：

$$\Omega = \Omega_2 \Omega_1^{-1} \in \mathfrak{S}_2.$$

このとき $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in SP_4(\mathbb{Z})$ は system ${}^t(B_1, B_2, A_1, A_2)$ に左から作用し、 Ω には $(A\Omega + B)(C\Omega + D)^{-1}$ で作用する。 λ_0 の小さな近傍でも、この手続きは有効で、局所的な周期写像が得られる。これを解析接続して多価周期写像 $\Phi_C : \Lambda \rightarrow \mathfrak{S}_2$ を定める。また、この設定のもとで Riemann theta constants

$$\vartheta \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \vartheta \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}(\Omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \exp[\pi i(a/2 + n)\Omega^t(a/2 + n) + 2\pi i(a/2 + n)^t b/2]$$

with $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in \{0, 1\}^2$ が定義される。Rosenhein の古典的結果によって、 Φ_C の逆写像が以下で与えられる：

Theorem 10.1. (Classical Rosenhein type formula)

$$\lambda_1 = -\frac{\vartheta^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vartheta^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{\vartheta^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vartheta^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}, \lambda_2 = \frac{\vartheta^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vartheta^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{\vartheta^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vartheta^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}, \lambda_3 = \frac{\vartheta^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vartheta^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{\vartheta^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \vartheta^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}. \quad (10.1)$$

We have the following numerical evidence of the above representation. For $(\lambda_{10}, \lambda_{20}, \lambda_{30}) = (-0.6, -0.3, 0.6)$, it holds an approximate calculation

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} 0. + 0.997664927977185i & 0. + 0.40565698917220006i \\ 0. + 0.4056569887269773i & 0. + 1.2660611766736107i \end{pmatrix}.$$

By (10.1), we have

$$-0.6 + 3.9993 * 10^{-33}i, -0.3 + 1.88524 * 10^{-33}i, 0.6 + 3.16375 * 10^{-34},$$

here we used the truncation

$$\bar{\vartheta} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}(\Omega) = \sum_{n=(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2, |n_1| \leq 10, |n_2| \leq 10} \exp[\pi i(a/2 + n)\Omega^t(a/2 + n) + 2\pi i(a/2 + n)^t b/2]$$

10.2 Kumar による 4 次 Kummer 曲面の明示式

ここでは、種数 2 の曲線の parameter を $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ の代わりに (a, b, c) に取り替えて書く。Kumar [Ku1] によれば以下が成り立つ。

$$C = C(a, b, c) : y^2 = x(x-1)(x-a)(x-b)(x-c)$$

に対応する Kummer quartic は以下で与えられる：

$$\Sigma(a, b, c) : K_2 z_4^2 + K_1 z_4 + K_0 = 0,$$

with

$$\begin{aligned}
K_2 &= z_2^2 - 4z_1z_3 \\
K_1 &= (-2z_2 + 4(a+b+c+1)z_1)z_3^2 \\
&\quad + (-2(bc+ac+c+ab+b+a)z_1z_2 + 4(abc+bc+ac+ab)z_1^2)z_3 - 2abcz_1^2z_2, \\
K_0 &= z_3^4 - 2(bc+ac+c+ab+b+a)z_1z_3^3 + 4(abc+bc+ac+ab)z_1z_2 \\
&\quad + (a^2+b^2+c^2 - 2abc(a+b+1) - 2bc(b+c+1) - 2ac(a+c+1) \\
&\quad + a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 - 2abs(a+b+c+4))z_1^2z_3^2 \\
&\quad + (-4abcz_1z_2^2 + 4abc(c+a+b+1)z_1^2)z_3z_2 \\
&\quad - 2abc(bc+ac+c+ab+b+a)z_1^3z_3 \\
&\quad + a^2b^2c^2z_1^4.
\end{aligned}$$

$\Sigma(a, b, c)$ は 16 個の ordinary double points (nodes) を持つ singular surface で 16 本の P^1 が 16 枚の接平面 (tropes) に含まれる形で現れている。各 trope は 6 個の nodes を含み、各 node は 6 個の tropes に含まれる ((6,16) relation とされる)。

List of nodes

$$\begin{aligned}
n_1 &= (0 : 0 : 0 : 1), n_2 = (0 : 1 : 0 : 0), n_3 = (0 : 1 : 1 : 1), n_4 = (0 : 1 : a : a^2), \\
n_5 &= (0 : 1 : b : b^2), n_6 = (0 : 1 : c : c^2), n_{12} = (1 : 1 : 0 : abc), n_{13} = (1 : a : 0 : bc), \\
n_{14} &= (1 : b : 0 : bc), n_{15} = (1 : c : 0 : ab), n_{23} = (1 : a + 1 : a : a(b+c)), n_{24} = (1 : b + 1 : b : b(c+a)), \\
n_{25} &= (1 : c + 1 : c : c(a+b)), n_{34} = (1, a+b, ab, ab(c+1)), \\
n_{35} &= (1, a+c, ca, ac(b+1)), n_{45} = (1 : b + c : bc : bc(a+1)).
\end{aligned}$$

List of tropes

$$\begin{aligned}
T_0 &= (1 : 0 : 0 : 0), T_1 = (0 : 0 : 1 : 0), T_2 = (1 : -1 : 1 : 0), T_3 = (a^2 : -a : 1 : 0), \\
T_4 &= (b^2 : -b : 1 : 0), T_5 = (c^2 : -c : 1 : 0), T_{12} = (-abc : 0 : -1 : 1), T_{13} = (-bc : 0 : -a : 1), \\
T_{14} &= (-ca : 0 : -b : 1), T_{15} = (-ab : 0 : -c : 1), \\
T_{23} &= (-a(b+c) : a : -(a+1) : 1), T_{24} = (-b(c+a) : b : -(b+1) : 1), \\
T_{25} &= (-c(a+b) : c : -(c+1) : 1), T_{34} = (-ab(c+1) : ca : -(c+a) : 1), \\
T_{35} &= (-ca(b+1) : ca : -(c+a) : 1), T_{45} = (-bc(a+1) : bc : -(b+c) : 1).
\end{aligned}$$

ここで $T_3 : a^2z_1 - az_2 + z_3 = 0$ 等を表している。

11 Some elliptic fibrations according to Kumar

11.1 Fibration \mathcal{R}_1

Kumar は [Kul] において generic な Kummer 曲面の楕円曲面としての fibration を列挙 (25 種) しているが、その中の第 1 番目は singular composition $2I_0^* + 6I_2$ を持つもので、これは、genus 2 curve の Jacobi 多様体を involution で割って得られる Kummer 曲面を 6 lines で分岐する double cover と見て得られる fibering に一致する。得られる 定義方程式は

$$\eta^2 = 4t(\xi - t - 1)(a\xi - t - a^2)(b\xi - t - b^2)(c\xi - t - c^2)$$

で、 t 平面上に fibering され $t = 0, \infty$ 上に I_0^* 、他に、分岐直線どうしの交点の t 座標で I_2 fiber を生じている。これは標準表示 (3.1) と

$$\begin{cases} t = z_3/z_1 \\ \xi = z_2/z_1 \\ \eta = (z_4/z_1)(\xi^2 - 4t) - \xi(t^2 + (a+b+c+ab+bc+ca)t + abc) \\ \quad + 2t((a+b+c+1)t + (ab+bc+ca+abc)) \end{cases}$$

で対応している。

11.2 Fibration \mathcal{R}_{18}

Kumar による 18 番目の elliptic fibration :

$$S_{K18}(a, b, c) : y^2 = x^3 + ((-4(2abc^2 - bc^2 - ac^2 - ab^2c + 2b^2c - a^2bc - bc - a^2c + 2ac - ab^2 + 2a^2b - ab)t^2 + 8(bc + ac - c - ab + b - a)t - 8)x^2 - 16(bt - at - 1)(act - at - 1)(act - ct - abt + bt - 1)(bct - abt - 1)(bct - ct - 1)x. \quad (11.1)$$

Fibration は $\pi : (t, x, y) \mapsto t$ である。パラメータ (a, b, c) が generic のとき singular composition $I_4 + 5I_2 + I_1 + III^*$ となり two-torsion section $\{x = y = 0\}$ を持つ。特異ファイバーは以下で列挙される :

$\pi^{-1}(0)$	$\pi^{-1}(t_1)$	$\pi^{-1}(t_2)$	$\pi^{-1}(t_3)$	$\pi^{-1}(t_4)$	$\pi^{-1}(t_5)$	$\pi^{-1}(t_0)$	$\pi^{-1}(\infty)$
I_4	I_2	I_2	I_2	I_2	I_2	I_1	III^*
A_3	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	-	E_7

with

$$t_0 = \frac{(-a^2b^2 + 2a^2b^3 - a^2b^4 + 2a^3bc + 2ab^2c - 4a^2b^2c - 2ab^3c + 2a^2b^3c - 2a^3b^3c + 2a^2b^4c - a^4c^2 - 4a^3bc^2 + 2a^4bc^2 - b^2c^2 + 2ab^2c^2 + 4a^2b^2c^2 + 2a^3b^2c^2 - a^4b^2c^2 - 4a^2b^3c^2 + 2a^3b^3c^2 - a^2b^4c^2 + 2a^3c^3 - 2abc^3 + 2a^2bc^3 - 2a^3bc^3 + 2b^2c^3 - 4ab^2c^3 + 2ab^3c^3 - a^2c^4 + 2abc^4 - b^2c^4)}{(4abc(a-1)(b-1)(c-1)(a-b)(b-c)(c-a)), \quad (11.2)$$

and

$$t_1 = \frac{1}{b-a}, t_2 = \frac{1}{b(c-a)}, t_3 = \frac{1}{(a-1)(c-b)}, t_4 = \frac{1}{a(c-1)}, t_5 = \frac{1}{c(b-1)}.$$

Proposition 11.1. 楕円曲面 S_{K18} は $t_0 = 0$ のときそのときのみ \mathcal{F}_N に属する。

Remark 11.1. Hashimoto-Murabayashi [H-M] (Theorem 2.9 p. 285) は Kummer surface S_{K1} が $\sqrt{5}$ の作用を持つ条件 $C_{HM}(a, b, c) = 0$,

$$C_{HM}(a, b, c) = 4(a^2bc - ab^2c)(b - b^2 - c + a^2c + (1-a)c^2) - (a(b-c) + a^2(1+b)c + (1-a)bc^2 - b^2(a+c))^2.$$

を与えているが、実際に $C_{HM}(a, b, c)$ は t_0 の分子とパラメータ a, b, c の適当な順送りによって一致する。

11.3 Fibration \mathcal{R}_{23}

第 23 番は singular composition $I_5^* + 6I_2 + I_1$ で表示式は

$$y^2 = x^3 - 2\left(t^3 - \frac{I_4}{12}t + \frac{I_2I_4 - 3I_6}{108}\right)x^2 + \left(\left(t^3 - \frac{I_4}{12}t + \frac{I_2I_4 - 3I_6}{108}\right)^2 + I_{10}\left(t - \frac{I_2}{24}\right)\right)x. \quad (11.3)$$

ここで I_2, I_4, I_6, I_{10} は Igusa-Clebsch invariants で a, b, c の基本対称式で書いているもの (後述の Prop. 13.1 参照)。

12 周期写像の明示的構成

われわれの曲面族 $\mathcal{F}_0 = \{S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)\}$ の reference surface として

$$S_0 = S(4, 1, 5, 18) : z^2 = y^3 + (-12x^4 - 5x^5)y + (x^5 - 2x^6 + 18x^7)$$

を定め、当分 $P_0 = (4, 1, 5, 18)$ の近傍での S_0 の変形のみを考える。 S_0 から x -space への射影を π で表す。

Proposition 12.1. 楕円曲面 S_0 の singular composition は $II^*+5I_1+III^*$ で $\pi^{-1}(0), \pi^{-1}(\infty)$ がそれぞれ II^*, III^* で 5本の I_1 fibers は $-27+108x+5832x^2+10584x^3-5148x^4+500x^5=0$ の根 $-0.422264, -0.0862632, 0.0569883, 3.68146, 7.06608$ でこれらを順に a_1, \dots, a_5 とし $0 = a_0, \infty = a_\infty$ と名付ける。

切断 $s_0 : y = \infty$ と general fiber とで hyperbolic lattice U を生じ、 s_0 と交差しない $\pi^{-1}(0), \pi^{-1}(\infty)$ の成分がそれぞれ $-E(8)$ および $-E(7)$ を与え、これらによって generic Picard lattice $L_0 = (-E(8)) \oplus (-E(7)) \oplus U$ が生成される。

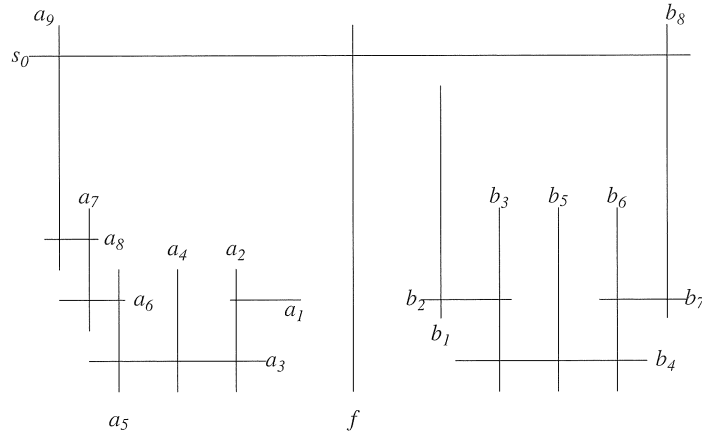


Fig.4.3: Picard lattice of $S(b, c)$ with a section σ

x - plane 上の base point $x = b = i$ を取って、 b を始終点とし a_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \infty$) を正の向きに一周する closed arc δ_i を作る。 $H_1(\pi^{-1}(b), \mathbb{Z})$ の basis $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ を $\gamma_1 \cdot \gamma_2 = 1$ となる適当なものに定めると、 δ_i が引き起こす monodromy 変換 M_i は以下で与えられる：

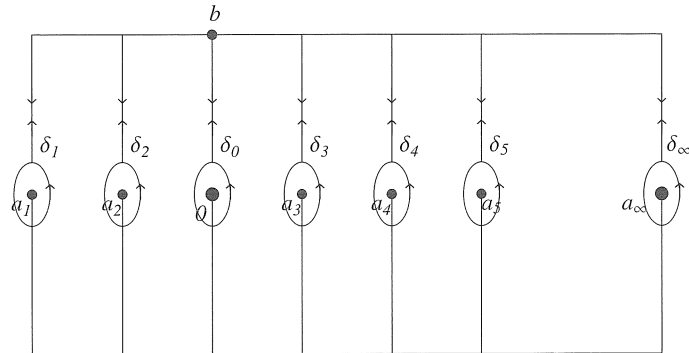


Fig.4.4: Singular fibers of S_0

$$\begin{matrix} M_1 & M_2 & M_0 & M_3 & M_4 & M_5 & M_\infty \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

これを用いて Transcendental lattice $T(S_0) = L_0^\perp$ の基底 $\{G_1^*, \dots, G_5^*\}$ が Figure 4.5 のように構成される：

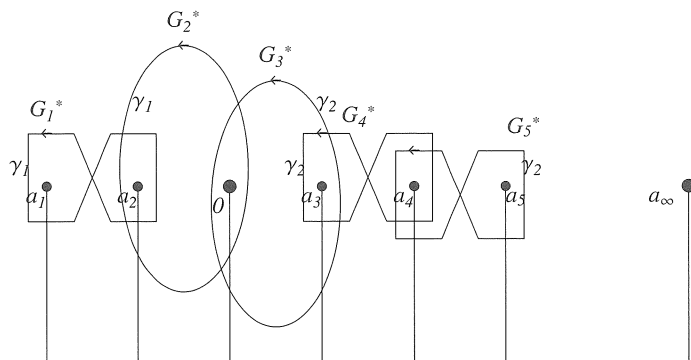


Fig.4.5: Basis of $Tr(S_0)$

ここで、下半平面の定点 b と各 a_i とを line l_i で結び、単連結な $P^1 - \bigcup_i l_i$ において $\pi^{-1}(x)$ の homology basis $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ を $\pi^{-1}(b)$ 上の system $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ からの接続によって同定している。 $\{G_1^*, \dots, G_5^*\}$ の交点行列は以下で与えられる：

$$(G_i^* \cdot G_j^*) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$T_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

によって基底変換 ${}^t(\Gamma_1^*, \dots, \Gamma_5^*) = T_n {}^t(G_1^*, \dots, G_5^*)$ を行えば $(\Gamma_i^* \cdot \Gamma_j^*) = B_0$ を得る。 $\Gamma_i \cdot \Gamma_j = \delta_{ij}$ となる双対基底 $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_5\}$ を取れば $\eta = (\int_{\Gamma_1} \varphi, \dots, \int_{\Gamma_5} \varphi)$ に対して、周期関係

$$\eta B_0 {}^t \eta = 0, \eta B_0 {}^t \bar{\eta} > 0$$

が得られる。すなわち、対応 $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mapsto \eta$ を解析接続して得られる多価写像として、族 \mathcal{F}_0 に対する周期写像 $\Phi : P(2, 3, 5, 6) - \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}_{B_0}^+$ が明示的に構成される。Remark 9.1 によって、 Φ は $P(2, 3, 5, 6)$ 上、一点 $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1, 1, 0, 0)$ を除く各点に解析接続される。なお system $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_5\}$ は有理数係数表示で

$${}^t(\Gamma_1, \dots, \Gamma_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(1/2) & 0 & -(1/2) \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} {}^t(G_1^*, \dots, G_5^*)$$

である。

13 相互翻訳による parameter の theta 表示

13.1 Igusa invariants

genus 2 曲線

$$y^2 = u_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)(x - x_6) \quad (13.1)$$

に対して Igusa-Clebsch invariants は以下で定義される：

$$\begin{cases} I_2 = u_0^2 \sum_{15} (12)^2 (34)^2 (56)^2 \\ I_4 = u_0^4 \sum_{10} (12)^2 (23)^2 (31)^2 (45)^2 (56)^2 (64)^2 \\ I_6 = u_0^6 \sum_{60} (12)^2 (23)^2 (31)^2 (45)^2 (56)^2 (64)^2 (14)^2 (25)^2 (36)^2 \\ I_{10} = u_0^{10} \prod_{i < j} (ij)^2, \end{cases} \quad (13.2)$$

ここで、 (ij) は $x_i - x_j$ を表し、 \sum の下の数字は和の項数を表す。

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3) \quad (13.3)$$

に対しての Igusa invariants は、上記 I_k を x_6 に関しての多項式として展開し最高次の係数 $P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ において $x_5 = 0, x_4 = 1, x_3 = \lambda_3, x_2 = \lambda_2, x_1 = \lambda_1$ において得られる。この計算を実際に行うと以下のように書き下される。

Proposition 13.1.

$$\begin{cases} I_2 = 2(3s_1^2 - 2(s_2 + 4s_3)s_1 + 3s_2^2 - 8s_2 + 12s_3), \\ I_4 = 4(-3s_3s_1^3 + (s_2^2 - s_3s_2 + s_3^2 + 3s_3)s_1^2 \\ \quad + (-s_2^2 + 11s_3s_2 - 3s_3)s_1 - 3s_2^3 + (3s_3 + 1)s_2^2 - 3s_3^2s_2 - 18s_3^3), \\ I_6 = -24s_2^3 + 48s_2^4 + 24s_1^4s_3 + 104s_2^2s_3 + 53s_3^2s_3 - 36s_3^3 + 168s_2s_3^2 + 199s_2^2s_3^2 - 180s_3^3 \\ \quad - 42s_2s_3^3 - 36s_3^4 + s_1^3(-8s_2^2 - 24s_3 + 307s_2s_3 - 73s_3^2) \\ \quad + s_1^2(8s_2^2 - 36s_3^2 + 123s_2s_3 + 450s_2^2s_3 - 53s_3^2 + 396s_2s_3^2 + 72s_3^3) \\ \quad + s_1(20s_2^3 + 76s_2s_3 + 328s_2^2s_3 + 189s_3^2s_3 - 168s_3^3 + 826s_2s_3^2 + 189s_2^2s_3^2 + 294s_3^3) \\ I_{10} = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2(\lambda_1 - 1)^2(\lambda_2 - 1)^2(\lambda_3 - 1)^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_2 - \lambda_3)^2(\lambda_3 - \lambda_1)^2, \end{cases} \quad (13.4)$$

ただし $s_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, s_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1, s_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

13.2 相互翻訳その 1

(9.1) と (11.3) は singular composition の等しい Kodaira 標準形の楕円曲面族であるから、両者は一致する。係数比較をして以下を得る。

Theorem 13.1. *It holds*

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{9}I_4 \\ \beta = \frac{1}{27}(-I_2I_4 + 3I_6) \\ \gamma = 8I_{10} \\ \delta = \frac{2}{3}I_2I_{10}. \end{cases} \quad (13.5)$$

Remark 13.1. *Already the Igusa invariants are described by the elementary symmetric polynomials s_1, s_2, s_3 of $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. So this system of equalities gives the mutual correspondence between two systems of parameters for \mathcal{K}_{CD} and \mathcal{R}_{23} (namely the parameter system of \mathcal{F}_{g^2} . Moreover, we already have a theta representations for the system $\{J_2, J_4, J_6, J_{10}\}$.*

Remark 13.2. *So, the above system of equalities give a theta representation of the parameters $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ via Rosenhein type theta's. It is essentially already obtained in [C-D]. Here we got the same result by an alternative way.*

13.3 相互翻訳その 2

$\sqrt{5}$ の作用を持つ Kummer 曲面の族を与える楕円曲面族 \mathcal{K}_N の parameter (A, B, C) を Kumar の elliptic fibration を経過して genus two curve の超楕円表示 $C(a, b, c)$ の分岐点 a, b, c で表してみよう。 $Z_N(A, B, C) \in \mathcal{F}_N$ は 2-torsion を持ち、表示

$$Z_N(A, B, C) : w^2 = (u^2 - 2y^5)(u - (5Ay^2 - 10By + C)), \quad (13.6)$$

で与えられていた。また nondegenerate member は singular composition $I_5 + 5I_2 + III^*$ を有していた。したがって、 \mathcal{F}_N は nondegenerate member が singular composition $I_4 + 5I_2 + I_1 + III^*$ で 2-torsion section を持つ楕円 $K3$ 曲面の族 \mathcal{R}_{18} に含まれている。

Proposition 13.2. *Kumar による no.18 の楕円曲面は singular composition $I_4 + 5I_2 + I_1 + III^*$ で 2-torsion section を持つ楕円 $K3$ 曲面の族で、以下の表示で与えられる：*

$$\begin{cases} z^2 = x^3 + p_0(t)x^2 + q_0(t)x, \\ \text{with} \\ p_0(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \\ q_0(t) = \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}a_1a_0t + \frac{1}{4}(a_1^2 + 2a_2a_0)t^2 + \frac{1}{2}a_1a_2t^3 + b_4t^4 + b_5t^5. \end{cases} \quad (13.7)$$

このとき実乗法 $\sqrt{5}$ を持つ条件は、 $4b_4 = a_2^2$ で与えられる。

Theorem 13.2. 永野の Kummer 曲面族 \mathcal{F}_H の affine parameter $X = \frac{B}{A^3}, Y = \frac{C}{A^5}$ に対して

$$\begin{cases} X = -50 \frac{a_1}{a_2^3} \\ Y = 2^4 5^5 \frac{a_0}{a_2^5}, \end{cases} \quad (13.8)$$

where

$$\begin{cases} a_0 = -8, \\ a_1 = -8(a - b + ab + c - ac - bc), \\ a_2 = 4(ab - 2a^2b + ab^2 - 2ac + a^2c + bc + a^2bc - 2b^2c + ab^2c + ac^2 + bc^2 - 2abc^2). \end{cases} \quad (13.9)$$

Remark 13.3. これは (10.1) における theta constant を用いた X, Y の表示に他ならない。

[Part IV 文献]

References

- [C-D] A. Clingher and C. Doran, *Lattice polarized K3 surfaces and Siegel modular forms*, arXiv:1004.3503v1, 2010.
- [H-M] K. Hashimoto and Murabayashi N., *Shimura curves as intersections of Humbert surfaces and defining equations of QM-curves of genus two*, Tôhoku Math. J., 47(1995), 271 – 296.
- [Ig1] J. Igusa, On the ring of modular forms of degree two over \mathbb{Z} , American Journal of Mathematics Vol. 101, No. 1 (Feb., 1979), pp. 149-183
- [Ig2] J. Igusa, Modular forms and projective invariants, American Journal of Mathematics Vol. 89, No. 3 (Jul., 1967), pp. 817-855.
- [Ig3] J. Igusa, Arithmetic variety of moduli for genus two, Ann. of Math. , vol. 72(1960), 612 –649.
- [Ig4] J. Igusa, On Siegel modular forms of genus two, Amer. J. Math. , vol. 84(1962), 175 – 200.
- [Ku1] A. Kumar, *K3 surfaces associated to curves of genus two*, arXiv:math/0701669v1, 2007.
- [Ku2] A. Kumar, *Elliptic fibrations on a generic Jacobian Kummer surface*, arXiv:1105.1715v1, 2011.
- [Hi] F. Hirzebruch, *The ring of Hilbert modular forms for real quadratic fields of small discriminant*, Lecture Notes in Math. **627**, Springer-Verlag, 1977, 287-323.
- [Mu] R. Müller *Hilbertsche Modulformen und Modulfunctionen zu $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$* Arch. Math. **45**, 1985, 239-251.
- [Na2] A. Nagano, *A theta expression of the Hilbert modular functions for $\sqrt{5}$ via the periods of K3 surfaces*, Kyoto J. M., to appear, 2012.
- [Na3] A. Nagano, *A family of Kummer surfaces coming from K3 surfaces with $\sqrt{5}$ action*, preprint, 2012.
- [Th] J. Thomae, *Beitrag zur Bestimmung von $\theta(0, 0, \dots, 0)$ durch die Klassenmoduln algebraischer Funktionen*, Crelles J. , vol. 71(1870), 201–222.
- [VG] G. van der Geer, *Hilbert modular surface*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988.

[総合 $K3$ modular 周辺文献]

- [Ko1] Kenji Koike, *On the family of pentagonal curves of genus 6 and associated modular forms on the ball*, J. Math. Soc. Japan 55 (2003), no. 1, 165–196.
- [Ko2] K. Koike, *Hessian $K3$ surfaces of non Sylvester type*, J. Algebra 330 (2011), 388–403.
- [Ma] Keiji Matsumoto, *Theta functions on the bounded symmetric domain of type $I_{2,2}$ and the period map of a 4-parameter family of $K3$ surfaces*, Math. Ann. 295 (1993), 383 – 409.
- [MSY] K. Matsumoto, T. Sasaki and M. Yoshida, *The monodromy of the period map of a 4-parameter family of $K3$ surfaces and the hypergeometric function of type $(3, 6)$* , Internat. J. Math. 3 (1992), 1–164.
- [M-T1] K. Matsumoto, T. Terasoma, *Arithmetic-geometric means for hyperelliptic curves and Calabi-Yau varieties*. Internat. J. Math. 21 (2010), no. 7, 939–949.
- [M-T2] K. Matsumoto, T. Terasoma, *Thomae type formula for $K3$ surfaces given by double covers of the projective plane branching along six lines*. Crelle J. ,669 (2012), 121–149.
- [Na] Atsuhira Nagano, *Period differential equations for the family of $K3$ surfaces with 2 parameters derived from the reflexive polytopes*, Kyushu J. Math., vol. 66 (2012), 193 – 244.
- [S-Y] Takeshi Sasaki and Masaaki Yoshida, *Linear differential equations in two variables of rank 4, II - The uniformizing equation of a Hilbert modular orbifold*, Math. Ann. 282 (1988), 95 – 111.
- [総合文献 Shiga 分]
- [HS1] Shiga, H., *One attempt to the $K3$ modular function*, Several Complex Variables Proc. Int. Conf. Cortona 1977(1978), 277 - 281.
- [HS2] Shiga, H., *One attempt to the $K3$ modular function I*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser IV vol. VI(1979), 609 - 635.
- [HS3] Shiga, H., *One attempt to the $K3$ modular function II*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser IV vol. VIII(1981), 157 - 182.
- [HS4] Shiga, H., *$K3$ モジュラー関数について*, 数学、38 巻 2 号 (1986)、116 - 132.
- [HS5] Shiga, H., *On the representation of the Picard modular function by theta constants I-II*, Pub. R.I.M.S. Kyoto Univ., vol. 24(1988), 311 - 360.
- [HS6] Shiga, H., *On the transcendency of the values of the modular function at algebraic points*, Soc. Math. France Asterisque 209(1992), 293 - 305.
- [HS7] Shiga, H. *On the arithmetic properties of the modular function induced from the hypergeometric differential equation*, Proc. 7th Int. Coll. Differential Equations (Prodiv, 1996), 381-388, VSP, Utrecht, 1997.
- [S-W] Shiga, H. and Wolfart, J., *Criteria for complex multiplication and transcendence properties of automorphic functions*, J. reine angew. Math., Bd 463(1995), 1 - 25.
- [N-S] Narumiya, N. and Shiga, H., *The mirror map for a family of $K3$ surfaces induced from the simplest 3-dimensional reflexive polytope*, CMR Proceeding and Lecture notes vol.30 (2001),139 - 161.
- [KSTT] Koike, K., Shiga, H., Takayama, N. and Tsutsui, T., *Study on the family of $K3$ surfaces induced from the lattice $(D_4)^3 \oplus \langle -2 \rangle \oplus \langle 2 \rangle$* , Int. J. Math., vol. 12(2001), 1049 - 1085.
- [K-S] Koike, K. and Shiga, H., *Isogeny formulas for the Picard modular form and a three terms arithmetic geometric mean*. J. Number Theory, 124(2007), 123-141.
- [S-W2] Shiga, H. and Wolfart, J., *Algebraic values of Schwarz triangle functions*, Prog. Math., vol. 260, 287-312(2007), Birkhäuser
- [K-S2] Koike, K. and Shiga, H., *Extended Gauss AGM and corresponding Picard modular forms*. J. Number Theory, 128(2008), 2097-2126.
- [M-S] Matsumoto, K. and Shiga, H., *A variant of Jacobi type formula for Picard curves*, J. Math. Soc. Japan, 62(2010), 1-15 .
- [HS8] Shiga, H., , *A Jacobi type formula for a family of hyperelliptic curves of genus 3 with automorphism of order 4*, Kyushu J. Math. (2011).
- [P-S] Petkova, M. and Shiga, H., *A new interpretation of the Shimura curve with discriminant 6 in terms of Picard modular forms*, Arvh. Math. 96 (2011), 335–348.