特異点解消定理と局所ゼータ関数の有理型解析接続

神本　丈 (九州大学)

岡シンポジュウム

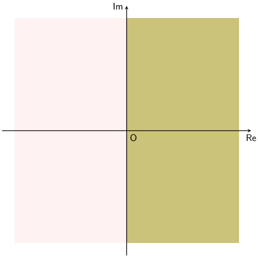
2022 年 12 月 18 日

次の積分について考える：

$$Z(s) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^s \varphi(x) dx, \quad s \in \mathbb{C}$$

- $f, \varphi \in C^\infty(U)$, U: 原点の開近傍 $\subset \mathbb{R}^n$;
- Supp$(\varphi) \subset U$.

積分の収束から, Z は右半平面上の正則関数とみなすことができる（$Z \in \mathcal{O}(\{\mathrm{Re}(s) > 0\})$）.



上の正則関数を (f, φ に関する) 局所ゼータ関数 とよぶ.

Z はより広い領域に解析接続されることが多い.

問題

局所ゼータ関数は，どのように解析接続されるか？

- $f \neq 0$ on $U \implies$ すべての $s \in \mathbb{C}$ について積分が収束する.
  $\implies Z \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ (自明な場合).
- f の零点集合が Z の解析接続の障害になる.
- $V(f) = \{x : f(x) = 0\}$ の幾何学的な性質が，Z の解析接続の様子に強く影響を及ぼす.

上の問題について，以下の仮定を課して考える:

- $f(0) = 0, \nabla f(0) = (0, \dots, 0)$ (臨界点),
  f は平坦でない at 0;
- $\varphi(0) > 0$, $\varphi(x) \geq 0$ on U.

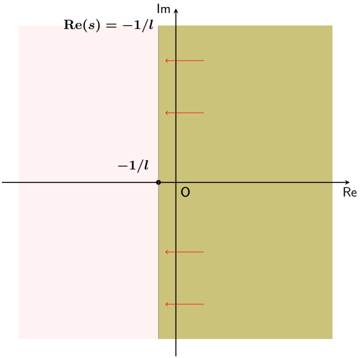
観察 ($n=1$ の場合)

$n=1$ の場合, 陰関数定理より $f(x)=x^l$ の場合を調べれば十分, i.e.

$$Z_+(s)=\int_0^\infty x^{ls}\varphi(x)dx.$$

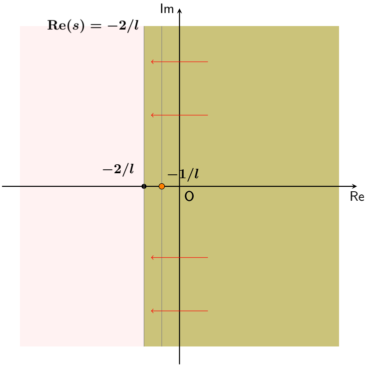
積分の収束から, $\mathrm{Re}(ls)>-1$ のとき, Z_+ は正則に拡張される, i.e.,

$$Z_+\in\mathcal{O}(\{\mathrm{Re}(s)>-1/l\}).$$



部分積分を用いると，$\mathbf{Re}(s) > -1/l$ のとき，

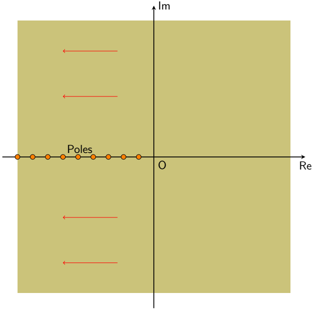
$$Z_+(s) = \int_0^\infty x^{ls}\varphi(x)dx = \frac{-1}{ls+1}\int_0^\infty x^{ls+1}\varphi'(x)dx.$$



- $Z_+ \in \mathcal{M}(\{\mathrm{Re}(s) > -2/l\})$.
- $\{\mathrm{Re}(s) > -2/l\}$ 上，Z_+ は $s = -1/l$ において高々1 位の極をもつ.

部分積分を何回も繰り返すことにより，$\mathrm{Re}(s) > -k/l$ $(k \in \mathbb{N})$ のとき，

$$Z_+(s) = \frac{(-1)^k}{(ls+1)\cdots(ls+k)} \int_0^\infty x^{ls+k}\varphi^{(k)}(x)dx.$$



定理 ($n = 1$ の場合)

Z は $\mathbb{C}$ 全体に有理型関数として解析接続できる，*i.e.*，$Z \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$.
さらに，$\{Z \text{ の極}\} \subset \{-k/l : k \in \mathbb{N}\}$ が成り立つ．

n が一般の場合 $(n \geq 2)$

1 次元の場合と比べてかなり難しい!! $\cdots$ 面白い.

- I.M.Gel'fand (1954, ICM 招待講演)

予想: f が多項式 $\Longrightarrow Z \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$?

- Bernstein-Gel'fand, M. Atiyah (1970 年前後)

$$f \in C^{\omega} \Longrightarrow Z \in \mathcal{M}(\mathbb{C}).$$

彼らの証明において, 広中の特異点解消定理 が使われている.

定理 (広中の特異点解消定理, 1964)

∃ 原点の開近傍 U, ∃ C^ω 多様体 X, ∃ 固有 C^ω 写像 $\pi : X \to U$ s.t.

1. π は $X \setminus \pi^{-1}(0)$ から $U \setminus \{0\}$ への同型写像.
2. $\forall P \in \pi^{-1}(0)$, ∃ C^ω 局所座標系 $y = (y_1, \ldots, y_n)$ *near* P s.t.

$$(f \circ \pi)(y) = \pm \prod_{j=1}^{n} y_j^{l_j}, \quad J_\pi(y) = u(y) \prod_{j=1}^{n} y_j^{m_j - 1},$$

ただし, $l_j \in \mathbb{Z}_+$, $m_j \in \mathbb{N}$, $u \in C^\omega$ *with* $u(0) \neq 0$.

$$Z(s) = \int_X |f(\pi(y))|^s \varphi(\pi(y)) J_\pi(y) dy = \sum_\alpha Z_\alpha(s),$$

with

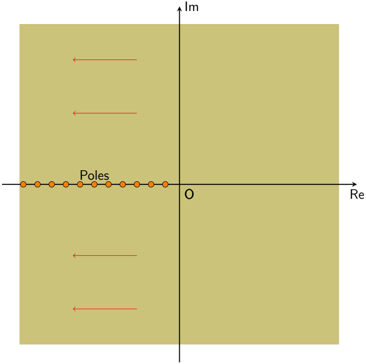
$$Z_\alpha(s) = \pm \int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{j=1}^{n} |y_j|^{l_j(\alpha)s + m_j(\alpha) - 1} \right) \varphi_\alpha(y) dy.$$

$n=1$ の場合の計算から, 累次積分をすることで次が得られる.

定理 (Bernstein-Gel'fand, M. Atiyah (1970 年前後))

$f \in C^\omega \Longrightarrow Z \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. さらに詳しく, $\{Z$ の極 $\} \subset \mathcal{P}$. ただし,

$$\mathcal{P} := \left\{ -\frac{m_j(\alpha)+k}{l_j(\alpha)} : \alpha,\ j=1,\ldots,n,\ k \in \mathbb{N} \right\}.$$



この定理から，振動積分の挙動に関して詳細な結果が得られる.

系 (振動積分の漸近展開)

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{itf(x)}\varphi(x)dx \sim \sum_{p\in\mathcal{P}}\sum_{k=1}^{n} c_{pk}t^p(\log t)^{k-1} \quad \text{as } t\to\infty.$$

この結果はすばらしいが，解析的な研究の側面からすると，抽象的で応用面における重要性が低い.

問題

より定量的に Z の極の位置と位数について調べよ!!
(特に，主要極について詳しく調べよ.)

A. Varchenko (1976)：
f のニュートン多面体 に基づくトーリック多様体の理論
$\longrightarrow$ 極の位置や位数に関する定量的な決定 (アルゴリズムの構成).

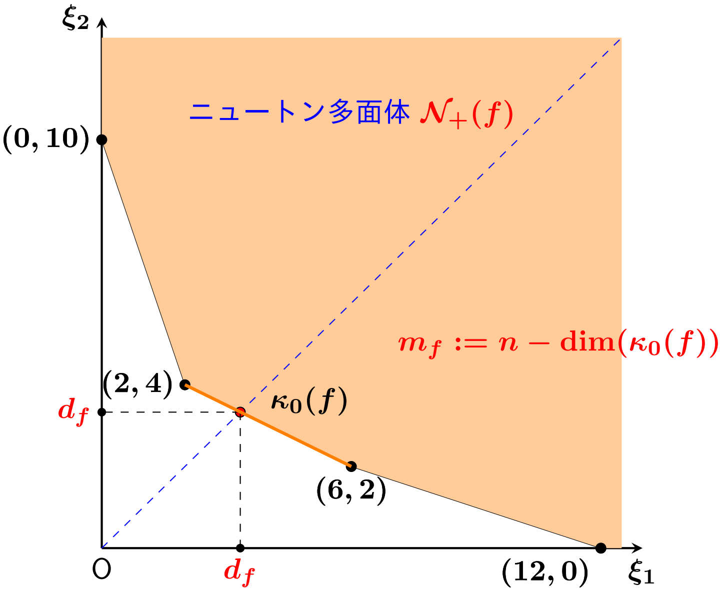
ニュートン・データ

$f(x) \sim \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} c_\alpha x^\alpha$ （f の原点におけるテイラー級数）.

- $S_f := \{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n : c_\alpha \neq 0\}$.
- $\mathcal{N}_+(f) := \bigcup \{\alpha + \mathbb{R}_+^n : \alpha \in S_f\}$ の凸包.
  （f のニュートン多面体）
- $d_f := \min\{t > 0 : (t, \ldots, t) \in \Gamma_+(f)\}$
  （f のニュートン距離）
- $\kappa_0(f)$: 点 $(d_f, \ldots, d_f)$ を含む最小の面.
- $m_f := n - \dim(\kappa_0(f))$.

注意: d_f は選ぶ座標系 (x) に強く依存する.
$\delta_0(f) := \sup_{(x)} d_f$. （$f$ の高さ）

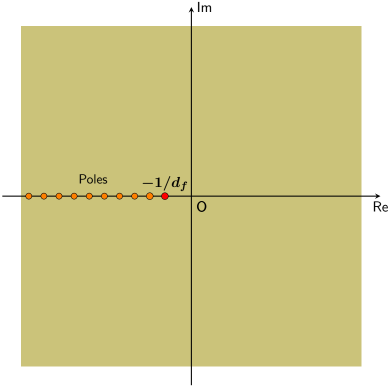
例：$f(x_1,x_2)=x_1^{12}+x_1^8x_2^6+x_1^6x_2^2+x_1^2x_2^4+x_1^2x_2^6+x_2^{10}$



定理 (Varchenko 1976)

$f \in C^\omega$，f はニュートン非退化，$d_f > 1$ のとき，

1. 極の位置や位数は，f のニュートン多面体の幾何学的な情報により記述される．
2. 主要極は $s = -1/d_f$ に存在し，その位数は m_f となる．



系 (振動積分の漸近展開の主要項)

$f \in C^\omega$, f がニュートン非退化, $d_f > 1$ であるとき,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{itf(x)}\varphi(x)dx \sim c(\varphi)t^{-1/d_f}(\log t)^{m_f-1} \quad \text{as } t \to \infty.$$

Varchenko の研究以降，多くの重要な結果が得られている.

1. (数論，特異点論)
   Denef, Sargos, Nicaise, Veys (Belgium),
   Zúñiga-Galindo, Léon-Cardenal, Gómez-Morales, Fuensanta (Mexico).
2. (実解析)
   Phong-Stein, Ikromov-Müller, Greenblatt, Collins-Greenleaf-Pramanik.

"よい" 特異点解消定理 $\Longrightarrow$ "よい" 結果!!!

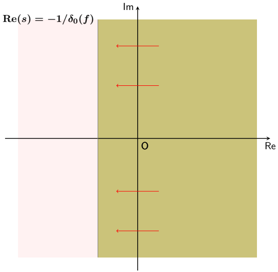
特に，Greenblatt と Ikromov-Müller は，f が C^∞ 関数の場合について結果を得ている.

f が C^∞ 級の場合

- $n=1$ の場合は，実解析と同様に扱うことができるので，以後 $n\geq 2$ の場合のみ考える．
- C^∞ 級の場合には，一般に特異点解消定理のような定理はない．i.e., 有限回のブロー・アップを繰り返しても，$V(f)=\{x : f(x)=0\}$ の特異点が解消できない場合がある．

定理 (Greenblatt, 2005, $n=2$ の場合)

$Z\in\mathcal{O}(\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > -1/\delta_0(f)\})$．ただし，この評価は最良．



正則に拡張される領域は実解析的な場合と同様である．

C^∞ 級の場合に，有理型解析接続について考察しよう！

定理 (神本-野瀬, 2016)

$f \in \hat{\mathcal{E}}$，f はニュートン非退化 $\Longrightarrow Z \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$.
さらに，*Varchenko* の結果は $f \in \hat{\mathcal{E}}$ の場合にも自然に一般化される.

ここで， 関数のクラス $\hat{\mathcal{E}} \subset C^\infty$ はニュートン多面体を用いて定義され，次の場合を含む：

1. $n = 1$ の場合;
2. Denjoy-Carleman 準解析クラス ($\supset C^\omega$);
3. 利便な場合.

予想：$\hat{\mathcal{E}}$ は Varchenko の結果が自然に成立する 最大の クラスであろう.

問題

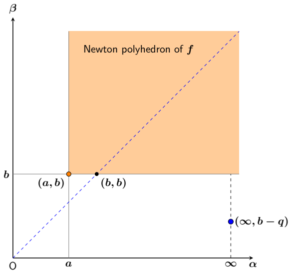
$\hat{\mathcal{E}}$ 以外の場合には，どのようなことが起きるか?

$Z \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ に関する反例

次の実解析的でない C^∞ 関数 ($\not\in \hat{\mathcal{E}}$) を考えてみよう:

$$f_*(x,y) = x^a y^b + x^a y^{b-q} e^{-1/|x|^p},$$

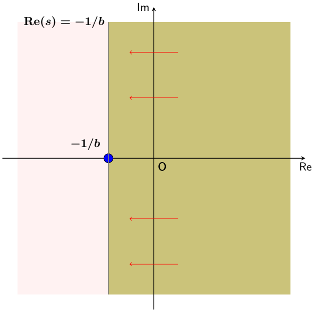
$a,b,q \in \mathbb{Z}_+$ は次をみたす : $a < b$, $2 \le b$, $1 \le q \le b$, q: 偶数, $p > 0$.



- $d(f_*) = \delta_0(f_*) = b$ (ニュートン距離と高さは b).

定理 (神本-野瀬, 2019)

f_* の場合, $\boldsymbol{Z}$ は $\boldsymbol{s = -1/b}$ において極ではない特異性をもつ.



問題

$\boldsymbol{Z}$ は $\boldsymbol{s = -1/b}$ においてどんな特異性をもつか?

現在までのところ，この問題に関してはほとんど成果が得られていない．
(孤立特異点かどうかも解っていない．)

このような現象をより一般的に理解するために，次のような不変量を導入する．

$$\mathfrak{m}_0(f,\varphi) := \sup\left\{\sigma : \begin{array}{l} Z \text{ が有理型に解析接続される領域} \\ \text{が半平面 } \mathrm{Re}(s) > -\sigma \text{ を含む} \end{array}\right\},$$
$$\mathfrak{m}_0(f) := \inf\{\mathfrak{m}_0(f,\varphi) : \varphi \in C_0^\infty(U)\}.$$

- $\mathfrak{m}_0(f)$ 座標変換に関して不変である．
- $\mathfrak{m}_0(f) = \infty$ for $f \in C^\omega$ (Bernstein-Gelfand, Atiyah).
- $\mathfrak{m}_0(f_*) = 1/b < \infty$ (Kamimoto-Nose).

問題

$f \in C^\infty$ に対して，$\mathfrak{m}_0(f)$ の値を f の適切な情報を用いて記述せよ（または評価せよ）．

上の問題を，次の単純な場合に関して考えてみよう.

$$f(x,y) = u(x,y)x^a y^b + (\text{平坦な関数}).$$

$a, b \in \mathbb{Z}_+$ は $a \leq b$ をみたし, $u \in C^\infty(U)$ は $u(0,0) \neq 0$ をみたす.

次の 4 つの場合を考えれば十分:

(A) $f(x,y) = u(x,y)x^a y^b$,

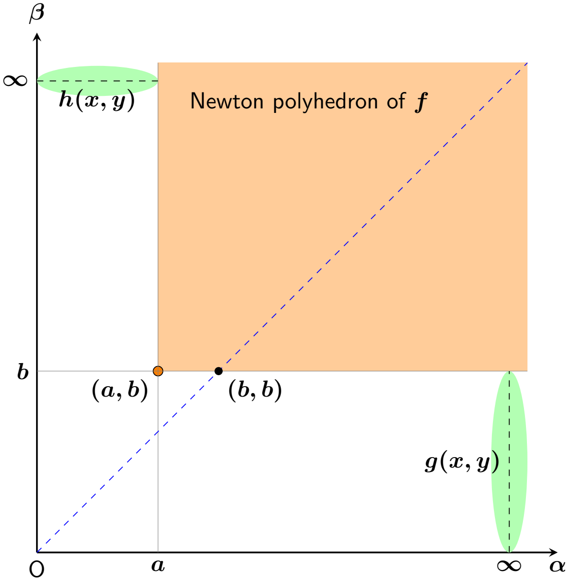
(B) $f(x,y) = u(x,y)x^a y^b + g(x,y)$,

(C) $f(x,y) = u(x,y)x^a y^b + h(x,y)$,

(D) $f(x,y) = u(x,y)x^a y^b + g(x,y) + h(x,y)$.

$$g(x,y) = \sum_{j=0}^{b-1} y^j g_j(x), \qquad h(x,y) = \sum_{j=0}^{a-1} x^j h_j(y),$$

ただし， h_j, g_j 平坦関数で，$h, g \not\equiv 0$.



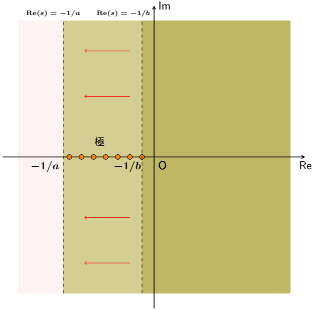
- $d(f) = \delta_0(f) = b$ (ニュートン距離と高さは b).

Greenblatt の結果から以下がわかる:

	(A)	(B)	(C)	(D)
$\mathfrak{m}_0(f)$	∞	$\geq 1/b$	$\geq 1/b$	$\geq 1/b$
	sharp	sharp	??	sharp

定理 (神本-野瀬 2020)

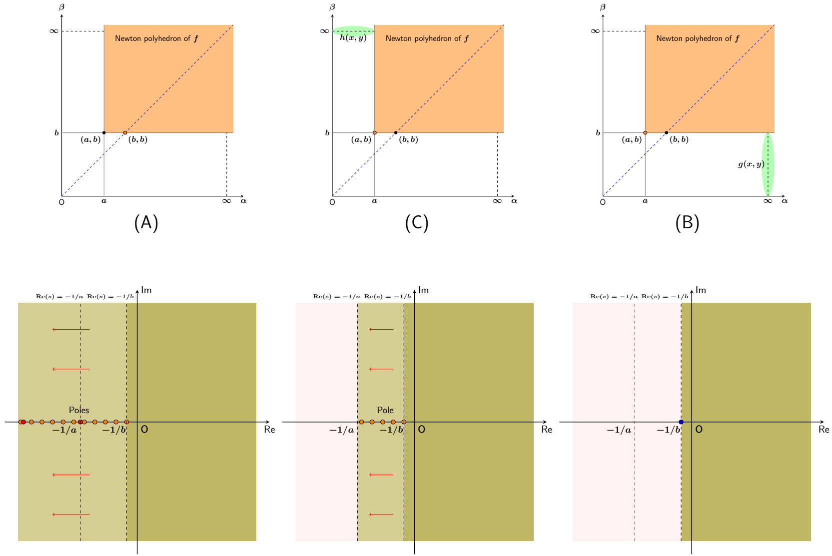
(C) の場合に, $Z \in \mathcal{M}(\{\mathrm{Re}(s) > -1/a\})$ (*i.e.*, $\mathfrak{m}_0(f) \geq 1/a$).
$a < b$ のとき, $\{Z$ の極 $\} \subset \{-k/b : k \in \mathbb{N}\}$.



上の結果から，次のような表が得られる．

	(A)	(B)	(C)	(D)
$\mathfrak{m}_0(f)$	∞	$\geq 1/b$	$\geq 1/a$	$\geq 1/b$
	sharp	sharp	sharp	sharp

ただし，上の "$\geq 1/a$" が sharp であることは，最近野瀬により示された．



Newton polyhedron of f
(a,b)
(b,b)
$h(x,y)$
$g(x,y)$
(A)
(C)
(B)
Re$(s) = -1/a$
Re$(s) = -1/b$
Poles
Pole
$-1/a$
$-1/b$
Im
Re

$n = 2$ の一般な場合の研究

$\overline{f}(x, y) \in \mathbb{R}[[x, y]]$: $f(x, y)$ の原点における形式的テイラー級数.
$\overline{f}(x, y)$ は形式的 Puiseux 級数を用いて次のように表される：

$$\overline{f}(x, y) = \overline{u}(x, y) x^{m_0} \prod_{j=1}^{r} (y - \overline{\phi}_j(x^{1/N}))^{m_j}.$$

- $N \in \mathbb{N}$, $m_0 \in \mathbb{Z}_+$, $m_j \in \mathbb{N}$,
- $\overline{u}(x, y) \in \mathbb{C}[[x, y]]$ 非零な定数項をもつ,
- $\overline{\phi}_j(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ 互いに違っている (i.e., $\overline{\phi}_j(t) \neq \overline{\phi}_k(t)$ if $j \neq k$).

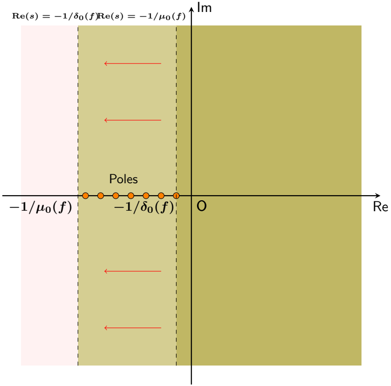
$$\mathcal{R}(f) := \{j : \overline{\phi}_j(t) \in \mathbb{R}[[t]]\} \cup \{0\};$$
$$\mu_0(f) := \max\{m_j : j \in \mathcal{R}(f)\}.$$

$\mu_0(f)$ は幾何学的には “形式的零因子の多重度” と呼ぶべき量である.

定理 (神本, preprint)

1. $\mu_0(f) = 0, 1 \Longrightarrow \mathfrak{m}_0(f) = \infty$;
2. $\mu_0(f) \geq 2 \Longrightarrow \mathfrak{m}_0(f) \geq 1/\mu_0(f)$.

$\mu_0(f) < \delta_0(f)$ のとき, $\mathbf{Re}(s) > -1/\mu_0(f)$ の上の極は有限個の等差数列の中に含まれる.



定理の証明

1. 幾何的な道具 $\cdots$ 概特異点解消定理
2. 解析的な道具 $\cdots$ Van der Corput の定理

- ブローアップを繰り返すことにより，一般の C^∞ 関数は，局所的に先に考えた (単項式) + (平坦関数) の形に表される．
- この場合には，Van der Corput の定理を用いることで、解析接続の様子がわかる．

C^∞ 級関数に関する概特異点解消定理

F を原点の近傍で定義された 2 変数の C^∞ 関数とする.
$F(x,y)$ のテイラー級数 $\overline{F}(x,y) \in \mathbb{R}[[x,y]]$ は次をみたしているとする：

$$\overline{F}(x,y) = \overline{u}(x,y) \prod_{j=1}^{r} (y - \overline{\phi}_j(x))^{m_j}.$$

- $m_j \in \mathbb{N}$,
- $\overline{u}(x,y) \in \mathbb{C}[[x,y]]$ 非零な定数項をもつ；
- $\overline{\phi}_j(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ は互いに違っている (i.e., $\overline{\phi}_j(t) \neq \overline{\phi}_k(t)$ if $j \neq k$).

一般的な C^∞ 級の場合を思い出して比較しよう:

$$\overline{f}(x,y) = \overline{u}(x,y) x^{m_0} \prod_{j=1}^{r} (y - \overline{\phi}_j(x^{1/N}))^{m_j}.$$

(上の違いは解析に影響を与えない!!)

定理 (概特異点解消定理)

∃原点の開近傍 U, $\exists C^\infty$ 実多様体 Y, $\exists C^\infty$ 固有写像 $\pi : Y \to U$ s.t.

1. π は $Y - \pi^{-1}(O)$ から $U - \{O\}$ への局所微分同相写像;
2. $j \in \mathcal{R}(F)$ に対して, $\exists\, P_j \in \pi^{-1}(O)$ かつ $\exists C^\infty$ 級局所座標 (x, y) at P_j s.t.

$$(F \circ \pi)(x, y) = u_j(x, y) x^{a_j} \left(y^{m_j} + \sum_{k=1}^{m_j} \varepsilon_{jk}(x) y^{m_j - k} \right),$$

$$J_\pi(x, y) = x^{M_j},$$

ただし, $a_j \in \mathbb{Z}_+$, $m_j \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_{jk}(x) \in \mathbb{R}C^\infty((x))$ は平坦関数, $u_j(x, y) \in \mathbb{R}C^\infty((x, y))$ は $u_j(0, 0) \neq 0$ をみたす; $M_j \in \mathbb{Z}_+$.

3. $Q \in \pi^{-1}(O) \setminus \{P_j\}$ に対して,∃ C^∞ 局所座標 (x, y) at Q s.t.

$$(F \circ \pi)(x, y) = u_Q(x, y) x^{A_Q} y^{B_Q} \quad \text{and} \quad J_\pi(x, y) = x^{C_Q},$$

ただし, $u_Q(x, y) \in \mathbb{R}C^\infty((x, y))$ は $u_Q(0, 0) \neq 0$ をみたし, $A_Q, B_Q, C_Q \in \mathbb{Z}_+$.

参考文献

- V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko: *Singularities of Differentiable Maps II*, Birkhäuser, 1988.
- F. Aroca, M. Gómez-Morales and E. León-Cardenal: On Archimedean zeta functions and Newton polyhedra, J. Math. Anal. Appl. **473** (2019), no. 2, 1215–1233.
- M. F. Atiyah: Resolution of singularities and division of distributions, Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 145–150.
- I. N. Bernstein and S. I. Gel'fand: Meromorphy of the function P^{λ}, Funktsional. Anal. Prilozhen. **3** (1969), 84–85.
- K. Cho, J. Kamimoto and T. Nose: Asymptotic analysis of oscillatory integrals via the Newton polyhedra of the phase and the amplitude, J. Math. Soc. Japan, **65** (2013), 521–562.

- T. C. Collins, A. Greenleaf and M. Pramanik: A multi-dimensional resolution of singularities with applications to analysis, Amer. J. Math. **135** (2013), 1179–1252.
- J. Denef, J. Nicaise and P. Sargos: Oscillating integrals and Newton polyhedra, J. Anal. Math. **95** (2005), 147–172.
- J. Denef and P. Sargos: Polyèdra de Newton et distribution f_+^s. I, J. Anal. Math. **53** (1989), 201–218.
- J. Denef and P. Sargos: Polyèdra de Newton et distribution f_+^s. II, Math. Ann. **293** (1992), 193–211.
- M. Greenblatt: Newton polygons and local integrability of negative powers of smooth functions in the plane, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), 657–670.

J. Kamimoto: Resolution of singularities for C^∞ functions and meromorphy of local zeta functions, preprint, arXiv:2209.05657.

J. Kamimoto and H. Mizuno: Asymptotic expansion of oscillatory integrals with singular phases, To appear in Kyushu Journal of Math., arXiv:2209.05663.

J. Kamimoto and T. Nose: On oscillatory integrals with C^∞ phases, Recent development of micro-local analysis for the theory of asymptotic analysis, 31–40, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B40**, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2013.

J. Kamimoto and T. Nose: Toric resolution of singularities in a certain class of C^∞ functions and asymptotic analysis of oscillatory integrals, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **23** (2016), no. 2, 425–485.

J. Kamimoto and T. Nose: Newton polyhedra and weighted oscillatory integrals with smooth phases, Trans. Amer. Math. Soc. **368** (2016), no. 8, 5301–5361.

- J. Kamimoto and T. Nose: On the asymptotic expansion of oscillatory integrals with smooth phases in two dimensions, Several aspects of microlocal analysis, 141–157, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B57**, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2016.
- J. Kamimoto and T. Nose: Asymptotic limit of oscillatory integrals with certain smooth phases, Regularity and singularity for partial differential equations with conservation laws, 103–114, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B63**, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2017.
- J. Kamimoto and T. Nose: Non-polar singularities of local zeta functions in some smooth case, Trans. Amer. Math. Soc. **372** (2019), no. 1, 661–676.
- J. Kamimoto and T. Nose: Meromorphy of local zeta functions in smooth model cases, J. Funct. Anal. **278** (2020), no. 6, 108408, 25 pp.
- T. Nose: Meromorphic continuation and non-polar singularities of local zeta functions in some smooth cases, preprint, arXiv:2206.10246.

- T. Okada and K. Takeuchi: Coefficients of the poles of local zeta functions and their applications to oscillating integrals, Tohoku Math. J. **65** (2013), 159–178.
- E. M. Stein: *Harmonic Analysis. Real-variable methods, orthogonality and oscillatory integrals*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.
- A. N. Varchenko: Newton polyhedra and estimation of oscillating integrals, Functional Anal. Appl., **10-3** (1976), 175–196.