第２０回岡シンポジウム

正標数の代数幾何

桂　利行（東大数理）

２０２２年１２月１７日

奈良女子大学

正標数の代数幾何の研究

1. 標数 0 で成り立つことを正標数で研究する
2. 標数 0 にない現象を研究する

内容

(1) アーベル多様体 (abelian variety) とそのモジュライ空間
(2) 単有理曲面
(3) K3 曲面 (K3 surface), Calabi-Yau manifold
(4) エンリケス曲面 (Enriques surface)
正標数の世界でどのようなことが研究されどのような問題があるか
私の研究してきた周辺を紹介する

以下、代数的閉体 k 上で考える.

1　標数0と標数$p>0$

標数$p>0$の特徴

- 微分 $dx^p = pdx^{p-1} = 0$
- 積分 $\int x^{p-1}dx$ ができない
- Frobenius 写像 $F: x \mapsto x^p$ が「準同型写像」になる

定理 (Cartier の定理)

標数$p=0$とすれば, k 上の群スキームは非特異である.

$p>0$ では Cartier の定理はなりたたない.

例 1

$\mu_p = \mathrm{Spec}k[x]/(x^p) \subset \mathbf{G}_m$ (乗法群)

$x \mapsto x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_2 + x_1 \otimes x_2$

local-global group scheme

例 2

$\alpha_p = \mathrm{Spec}k[x]/(x^p) \subset \mathbf{G}_a$ (加法群)

$x \mapsto x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_2$

local-local group scheme

正標数では、このような non-reduced な群が使える!

形式群（Formal group）

$x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n$:変数

$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$: 体 k 上の形式的べき級数

ベクトル記号を用いて $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ とおく.

$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が

(i) $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} + \mathbf{y} +$ 高次の項

(ii) $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{z})) = \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{z})$

(iii) $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$

をみたすとき, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を**可換形式群法則**, あるいは**可換形式群**,
あるいは**可換形式 Lie 群**と言う.
状況が明らかなときは単に形式群という.

n:形式群の次元という.

- 形式スキーム Spf $k[[x_1, x_2, \cdots, x_n]]$ の群構造を与えている.

- 代数群に対して, 零点の近傍においてその群演算を数式として捉えれば形式群を得る.

Spf $k[[x_1, x_2, \cdots, x_n]]$

$\mathbf{x} \star \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ とおく.
形式群の p 倍写像が

$$\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \star \mathbf{x} \star \cdots \star \mathbf{x} \quad (p\ 個)$$

で定義される.

$$\psi : k[[x_1, x_2, \cdots, x_n]] \longrightarrow k[[x_1, x_2, \cdots, x_n]]$$

定義 $k[[x_1, x_2, \cdots, x_n]]$ が,
ψ をとおして finite rank の自由 $k[[x_1, x_2, \cdots, x_n]]$ 加群になるとき,
この形式群は divisible であるという.

$n = 1$ とする.
p 倍写像 $[p](x)$

$$[p](x) = 0,\ または\ [p](x) = ax^{p^h} + 高次の項 \quad (a \in k, a \neq 0)$$

$[p](x) = 0$ のとき形式群のハイトは ∞ であるといい,
後者のときは形式群のハイトは h であるという.

1 次元形式群:
標数 0 の時, 加法群 $\mathbf{G}_a$ の群演算から得られる形式群 $\hat{\mathbf{G}}_a$ とすべて同型
標数 $p > 0$ の時, 1 次元形式群のハイトは自然数と ∞ の値を取り得,
1 次元形式群とハイトは 1 対 1 に対応する.

例
加法群 $\mathbf{G}_a$ の群演算から得られる形式群 $\hat{\mathbf{G}}_a$ は

$$f(x, y) = x + y$$

で与えられる. そのハイトは, $[p](x) = px = 0$ であるから, ∞ である.

乗法群 $\mathbf{G}_m$ の群演算から得られる形式群 $\hat{\mathbf{G}}_m$ は

$$f(x, y) = x + y + xy$$

で与えられる. そのハイト h は $[p](x) = x^p$ であるから $h = 1$ である.

後で述べる楕円曲線の場合:
- 通常楕円曲線ハイト $= 1$
- 超特異楕円曲線のハイト $= 2$

1 次元代数群から得られる形式群はここに挙げた 3 種類だけであり,
その他の 1 次元形式群には対応する代数群が存在しない.

Dieudonné 加群

$A_k = W(k)(F, V)$
F: Frobenius, V: Vershiebung
$W(k)$: 長さ ∞ の Witt vectors の環
σ: $W(k)$ の Frobenius, $\sigma : (a_0, a_1, \cdots) \mapsto (a_0^p, a_1^p, \cdots)$
関係式

$$FV = VF = p, Fa = a^\sigma F, Va = a^{\sigma^{-1}} V \ (a \in W(k))$$

定義 左 A 加群を Dieudonné 加群という．
注意この定義は一般的すぎるが、ここではこれを採用する．

$\mathcal{C}$: 可換形式群の圏
$\mathcal{D}$: Dieudonné 加群の圏

定理 $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への圏へ反変関手 D が存在する．

Dieudonné, Barsotti, Gabriel, Lazard, Manin, Tate, Tadao Oda, Hazewinkel
$\cdots$

注意 共変関手も存在し Tapis de Cartier と呼ばれる．

形式群の計算は Dieudonné 加群を用いて具体的になされる．

定義
h を自然数とする．
可換 finite group scheme G_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ の列

$$G_1 \hookrightarrow G_2 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow G_n \hookrightarrow G_{n+1} \hookrightarrow \cdots$$

で, rank $G_n = p^{nh}$, かつ
p 倍写像 $[p]_{n+1} : G_{n+1} \longrightarrow G_{n+1}$ に対して Ker $[p]_{n+1} = G_n$
となるものが存在して

$$G = \lim_{\rightarrow} G_n$$

となるとき, G を p-divisible group という．

- divisible 形式群と connected p-divisible group が 1 対 1 に対応する (J. Tate).

p-divisible group のなす圏を $\mathcal{P}$,
$W(k)$-module として free かつ finite rank の A-module のなすカテゴリを $\mathcal{D}'$

定理 反変同値 $D' : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{D}'$ が存在する．

アーベル多様体に付随する formal group は p-divisible group なので、Dieudonné module の理論が強力に使える．

例

$D(\hat{W}_n) = A/AV^n$,

$(G_{n,\infty} = \hat{W}_n$ とおく.)

とくに $D(\hat{\mathbf{G}}_a) = A/AV$

$D(\hat{\mathbf{G}}_m) = W(k)$ (F は $p\sigma$ で, V は σ^{-1} で作用)

$(G_{1,0} = \hat{\mathbf{G}}_m$ とおく)

互いに素な自然数 m, n に対し $D(G_{n,m}) = A/A(F^m - V^n)$(定義),

• 任意の formal group は $G_{n,m}$ の直和 ($m = 0, \infty$ の場合も含む) に isogenous になる.

•$G_{n,m}$ において, 次元 $= n$, ハイト $= m + n$

コホモロジー群

標数 $p > 0$ では $\mathbf{Q}$ 係数のよいコホモロジー理論を構成できない (J.-P. Serre)

E: 超特異楕円曲線

$B = \mathrm{End}(E) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$

$\mathbf{Q}$ 上の quaternion division algebra, ∞ と p で分岐

もし, $\mathbf{Q}$ 上の良いコホモロジー理論があれば, 単射準同型写像

$$\varphi : B \hookrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{H}^1(E, \mathbf{Q})) \cong M_2(\mathbf{Q})$$

が存在するはず.

両辺の次元を考えれば, この写像は同型になる.
これは, B が分解しないことに反する.

ℓ: 素数, $\ell \neq p$

•ℓ 進理論: étale colomology $\mathrm{H}^i(X, \mathbf{Q}_\ell)$

•p 進理論: crystalline cohomology $\mathrm{H}^i_{cris}(X)$

コホモロジー理論としてはしばしばこれらが用いられる.

2 Abelian variety

k：標数 $p > 0$ の代数的閉体
A: k 上の n 次元 abelian variety
$[p]_A : A \longrightarrow A$ ： p 倍写像
kernel の reduced part

$$\mathrm{Ker}\ [p]_A \cong (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^r \quad (0 \leq r \leq n)$$

r を A の p-rank という.

$n = 1$ のとき (elliptic curve のとき),
$r = 1$ の elliptic curve を ordinary elliptic curve,
$r = 0$ の elliptic curve を supersingular elliptic curve という.

A が n 個の supersingular elliptic curve の直積に isogenous なとき,
A を supersingular abelian variety,
n 個の supersingular elliptic curve の直積に同型なとき,
A を superspecial abelian variety という.

E_i $(i = 1, 2, \cdots, 2g; g \geq 2)$ を任意の supersingular elliptic curves とするとき,

$$E_1 \times \cdots \times E_g \cong E_{g+1} \times \cdots \times E_{2g}$$

が成り立つ (P. Deligne, A. Ogus, J.-P. Serre, T. Shioda)

これによって, supersingular や superspecial の概念は supersingular elliptic curve の取り方によらず決まる.

A： abelian surface $(n = 2)$ に対しては,
A が supersingular $\Longleftrightarrow$ A の p-rank $r = 0$

$n \geq 3$ の場合には,
A： supersingular $\Longrightarrow r = 0$
逆は成り立たない.

a-数

$\alpha_p = \mathrm{Spec} k[x]/(x^p)$ とおく.
group scheme
co-addition は

$$m^*: \quad k[x]/(x^p) \longrightarrow k[x]/(x^p) \otimes k[x]/(x^p)$$
$$x \mapsto x \otimes 1 + 1 \otimes x$$

$$\mathrm{End}(\alpha_p) \cong k$$

A : k 上の代数群

Hom(α_p, A) への End(α_p) の左からの作用を考えて,
Hom(α_p, A) は k 上のベクトル空間となる.

$$a(A) = \dim_k \mathrm{Hom}(\alpha_p, A)$$

とおいて, $a(A)$ を A の a-number と呼ぶ.

A が n 次元アーベル多様体ならば
$0 \le a(A) \le n$ である.

•$\dim A = n$, A に付随する形式群を $\hat{A}$ とすると次は同値 (F. Oort)

A が superspecial abelian variety
$\Leftrightarrow a(A) = n$
$\Leftrightarrow \hat{A} \cong nG_{1,1}$

一般に A に付随する formal group の形 (Yu. I. Manin)

$$\hat{A} \sim fG_{1,0} \oplus \sum_i \{G_{n_i,m_i} \oplus G_{m_i,n_i}\} \oplus rG_{1,1} \quad \text{(isogenous)}$$

ここに, $f + \sum\{n_i + m_i\} + r = n$.

主偏極アーベル多様体のモジュライ空間

$\mathcal{A}_g = \{(A, \Theta) \mid A : \text{abelian variety}, \ \Theta : \text{principal polarization}\}$
g 次元主偏極アーベル多様体 ($g \geq 2$) のモジュライ空間

$\mathcal{A}_g \supset \mathcal{P} \supset \mathcal{S}$
$\mathcal{P}$: supersingular abelian varieties のなす locus
$\mathcal{S}$: superspecial abelian varieties のなす locus

$\dim \mathcal{S} = 0$, $\mathcal{S}$ は有限集合
$\dim \mathcal{P} = [\frac{g^2}{4}]$ (Oort-Oda 予想, F. Oort-Ke Zeng Li)

Problem: $\mathcal{P}$ および $\mathcal{S}$ の irreducible components の数を求めよ.

E: a supersingular elliptic curve
$\mathcal{O} = \mathrm{End}(E)$, $B = \mathrm{End}(E) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ とおく.
B: quaternion division algebra, discriminant p
$\mathcal{O}$: a maximal order
B^g: B 上の left vector space

quaternion hermitian form
$x, y \in B^g$ に対し

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{g} x_i \bar{y}_i \quad x = (x_1, \cdots, x_g), \ y = (y_1, \cdots y_g)$$

ここに, $a \mapsto \bar{a}$ は B の cannonical involution
v: valuation of $\mathbf{Q}$
$B_v = B \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_v$, $\mathcal{O}_v = \mathcal{O} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_v$ とおく.
B^g の hermitian form から B_v^g の hermitian form が自然に induce される.

$$G = \{x \in M_g(B) \mid x\bar{x}^t = \lambda(x) 1_g, \ \lambda(x) \in \mathbf{Q}^*\}$$
$$G_v = \{x \in M_g(B_v) \mid x\bar{x}^t = \lambda(x) 1_g, \ \lambda(x) \in \mathbf{Q}_v^*\}$$

定義 (i) $L \subset B^g$: left $\mathcal{O}$-lattice $\Longleftrightarrow$ left $\mathcal{O}$-module かつ $\mathbf{Z}$-lattice
(ii) L の norm $= \{f(x,y) \mid x, y \in L\}$ で生成される両側 $\mathcal{O}$-ideal
(iii) 同じ norm をもつ $\mathcal{O}$-lattice のうちで maximal なものを maximal $\mathcal{O}$-lattice という.
(iv) maximal $\mathcal{O}$-lattice の全体を $\mathcal{L}(\mathcal{O})$ と書く.

L_1, L_2 left $\mathcal{O}$-lattice
$L_1 \sim_g L_2$ globally equivalent $\Longleftrightarrow L_1 g = L_2$ $(\exists g \in G)$
$L_1 \sim_\ell L_2$ locally equivalent at $v \Longleftrightarrow (L_1 \otimes \mathbf{Z}_v) g = (L_2 \otimes \mathbf{Z}_v)$ $(\exists g \in G_v)$

$\mathcal{L}_g(p,1) = \{L \in \mathcal{L}(\mathcal{O}) \mid L_q \sim \mathcal{O}_q^g \ \ \forall \text{prime } q\}$
principal genus という
$\mathcal{L}_g(1,p) = \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_g(p,1)$
non-principal genus という

これらについては (さらに一般の division algebra に対しても)、G. Shimura, K. Hashimoto, T. Ibukiyama による深い研究がある.

定義

$H_g = \mid \mathcal{L}_g(p,1)/\text{global equivalence} \mid$　principal genus の類数
$H'_g = \mid \mathcal{L}_g(1,g)/\text{global equivalence} \mid$　non-principal genus の類数

$g = 1$ (Eichiler)
$H_1 = H'_1 = \frac{p-1}{12} + \frac{1}{3}\{1 - (\frac{-3}{p})\} + \frac{1}{4}\{1 - (\frac{-1}{p})\}$
supersingular elliptic curve の数
$g = 2$ (K. Hashimoto-T. Ibukiyama)
$p = 2, 3$ のとき $H_2 = 1$
$p \geq 5$ のとき
$H_2 = (p-1)(p^2+1)/2880 + 7(p-1)^2/2^6 \cdot 3^2 + (p-1)(1 - (\frac{-1}{p}))/2^4 \cdot 3 + \cdots$
$p = 2, 3$ のとき $H'_2 = 1$
$p \geq 5$ のとき
$H'_2 = (p^2-1)/2880 + (p+1)\{1 - (\frac{-1}{p}\}/64 + \cdots$

定理 (Ibukiyama - Katsura - Oort, J.-P. Serre) $\mid \mathcal{S} \mid = H_g$

系 (Ibukiyama - Katsura - Oort) 種数 2 の nonsingular projective curve C で Jacobian variety $J(C)$ が superspecial になるものにわたる和は

$$\sum_C \frac{1}{\mid RAut(C) \mid} = (p-1)(p-2)(p-3)/2880$$

に等しい. ここに $RAut(C)$ は C の reduced automorphism group で,
自己同形群を種数 2 の曲線の involution で割った群.

定理 ($g \leq 3$ のとき Katsura - Oort, $g \geq 4$ のとき K.Z. Li- Oort)

$$\mathcal{P} \text{ の irreducible component の数} = \begin{cases} H_g & \text{if } g \text{ odd} \\ H'_g & \text{if } g \text{ even} \end{cases}$$

$\mathcal{A}_g$ など moduli space は興味深い subvariety の宝庫

モジュライ空間の subvariety が多元環の数論と結びつく理由

E : supersingular elliptic curve
$A = E_1 \times E_2 \quad (E_1 = E_2 = E)$
$\mathcal{O} = \mathrm{End}(E)$
$B = \mathrm{End}(E) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}$ 上の quaternion division algebra

$A = E_1 \times E_2 \quad (E_1 = E_2 = E)$
$X = E_1 \times \{O\} + \{O\} \times E_2$: a principal polarization
$\mathrm{End}(A) = \mathrm{M}_2(\mathcal{O})$ となる.

L: A 上の divisor

$$\begin{array}{rccl} \varphi_L: & A & \longrightarrow & \mathrm{Pic}^0(A) \\ & x & \mapsto & T_x^* L - L, \end{array}$$

ここに, T_x は $x \in A$ による translation

$A = E_1 \times E_2 \quad (E_1 = E_2 = E)$
$\mathcal{O} = \mathrm{End}(E)$

$$H = \{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathcal{O}) \mid \alpha, \delta \in \mathbf{Z},\ \gamma, \beta \in \mathcal{O},\ \gamma = \bar{\beta} \}$$

とおく.

$$\begin{array}{rccl} j: & \mathrm{NS}(A) & \longrightarrow & H \subset \mathrm{M}_2(\mathcal{O}) \\ & L & \mapsto & \varphi_X^{-1} \circ \varphi_L \end{array}$$

は全単射準同型写像.

$$j(E_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ j(E_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_1, L_2 \in \mathrm{NS}(A)$ をとり

$$j(L_1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix},\ j(L_2) = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}$$

とすれば, 交点数

$$L_1 \cdot L_2 = \alpha_2\delta_1 + \alpha_1\delta_2 - \gamma_1\beta_2 - \gamma_2\beta_1.$$

とくに, $L \in \mathrm{NS}(A)$ をとり $j(L) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ とすれば, 自己交点数

$$L^2 = 2 \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$
$$L \cdot E_1 = \alpha,\ L \cdot E_2 = \delta.$$

3 単有理曲面

X: n 次元代数多様体,
$k(X)$: X の有理関数体
$k(x_1, \cdots, x_n)$: k 上の n 変数純超越拡大体

定義
$\bullet f : \mathbf{P}^n \longrightarrow X$ なる双有理写像があるとき, X を有理多様体という.
$\bullet f : \mathbf{P}^n \longrightarrow X$ なる支配的な有理写像があるとき, X を単有理多様体という.

X が有理多様体 $\Leftrightarrow k(X) \cong k(x_1, \cdots, x_n)$
X が単有理多様体 $\Leftrightarrow k(X) \subset k(x_1, \cdots, x_n)$

• 有理多様体 $\Rightarrow$ 単有理多様体
この逆が問題になる.

(1) $n = 1$ のとき
定理 (Lüroth の定理)
k を体, θ を変数とする. このとき, $k(\theta) \supset L \supset k$, $L \neq k$ なる中間体 L に対し, θ の有理式 $\alpha(\theta)$ が存在して, $L = k(\alpha(\theta))$ となる.

単有理曲線 $\Leftrightarrow$ 有理曲線

(2) $n = 2$ のとき
定理 (Castelnuovo の有理性判定法)
非特異射影曲面 X が有理曲面になるための必要十分条件は

$$P_2(X) = 0 \text{ かつ } q(X) = 0.$$

である.

標数 0 の場合は O. Zariski, K. Kodaira, 正標数の場合は Kurke, W. Lang, N. Suwa などによる多くの証明が知られている.

定理
k を標数 0 の代数的閉体とする. このとき, 射影曲面 X が単有理曲面であることと有理曲面であることは同値である.

例 (O. Zariski)
$p \geq 3$ とし, 次の方程式で定義されるアフィン曲面の非特異射影モデル X を考える:

$$f(x, y, z) = z^p + x^{p+1} + y^{p+1} - (x^2 + y^2)/2 = 0.$$

$dy \wedge dz / \frac{\partial f}{\partial x}$ は X 上の正則 2-形式だから,
X は有理曲面ではない.
$k(\sqrt[p]{x}, \sqrt[p]{y}) \supset k(x, y, z) = k(X)$
X は単有理曲面である.
$p = 2$ のときも同様の例が Zariski の論文に与えられている.

(3) $n \geq 3$ のとき

標数が 0 の場合でも有理多様体ではない単有理多様体が存在する

(Clemens-Griffiths, Iskovskikh-Manin, Artin–Mumford)

定理 X を単有理曲面とする. 次が成り立つ.

(i) $q(X) = 0$.

(ii) $\rho(X) = b_2(X)$ となる (Shioda).

(iii) X のエタール被覆も単有理曲面, 代数的基本群 $\pi_1^{alg}(X)$ は有限群 (Serre).

(iv) $\pi_1^{alg}(X)$ の位数は p と素である (T.Katsura, R.Crew, N.Suwa, T.Ekedahl).

曲面の分類理論との関係

(Enriques-Castelnuovo-Kodaira-Mumford-Bombieri の分類理論)

$\kappa(X)$	特徴付け	曲面の名称	単有理曲面の存在
$-\infty$	$q(X) = 0$	有理曲面	+
	$q(X) \geq 1$	非有理線織面	-
0	$q(X) = 2$	Abel 曲面	-
	$q(X) = 1$	超楕円曲面, または	-
		準超楕円曲面 ($p = 2, 3$ のときのみ可能)	-
	$q(X) = 0,\ b_2(X) = 10$	Enriques 曲面	+
	$q(X) = 0,\ b_2(X) = 22$	K3 曲面	+
1		楕円曲面, または	+
		準楕円曲面 ($p = 2, 3$ のときのみ可能)	+
2		一般型曲面	+

分類理論における標数 0 と標数 $p>0$ の違い
ほとんど $p=2,3$ の場合の違いのみ

(i) quasi-elliptic surface の存在

X を代数曲面,
C を代数曲線,
$f: X \longrightarrow C$: 正則写像
標数 0 ならば, Sard の定理より general fiber は nonsingular
標数 p なら, これは成り立たない.

定理 (Tate)
C を一変数代数関数体 K 上の非特異代数曲線とし, その種数を g とする. $g<(p-1)/2$ ならば, C は K の代数的閉包 $\bar{K}$ 上も種数 g の非特異代数曲線である.

例 $p=3$
$y^2=x^3+t$　t は $\mathbf{P}^1$ 上のパラメータ
$k(t)$ 上は nonsingular
$k(\sqrt[3]{t})$ 上は singular で $y^2=x^3$ と同型

この定理から, genus 1 fibration ならば, C の一般点 P に対しファイバー $f^{-1}(P)$ が特異点を持ち得るのは標数 $p=2,3$ の場合に限ることがわかる.
このような曲面を準楕円曲面 (quasi-elliptic surface) という.

$f: X \to C$ を準楕円曲面とすれば, 一般の点 $P \in C$ に対し, ファイバー $f^{-1}(P)$ は尖点と呼ばれる特異点を持つ.
その X 上の軌跡は非特異代数曲線となり C 上純非分離被覆でその次数は p になることが知られている (Bombieri-Mumford)

(ii) 標数 2 の Enriques 曲面

標数 0 ならば,

Enriques 曲面 X

$\Leftrightarrow$ 標準束 $\omega_X \not\cong \mathcal{O}_X$, $\omega_X^{\otimes 2} \cong \mathcal{O}_X$ かつ $q(X) = 0$

ω_X から作られる次数 2 の étale covering は K3 surface

標数 2 の場合は, 様相がかなり異なり 3 つの場合に分かれる.

i) $K_X \not\sim 0$, $K_X^{\otimes 2} \sim 0$, $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ (古典的 **Enriques 曲面**),

ii) $K_X \sim 0$, Frobenius 写像 F が $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X) \cong k$ に全単射に作用 (特異 **Enriques 曲面**),

iii) $K_X \sim 0$, Frobenius 写像 F が $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X) \cong k$ に零写像として作用 (超特異 **Enriques 曲面**).

Enriques 曲面 X の Betti 数は標数にかかわらず $b_1(X) = 0$, $b_2(X) = 10$ であり, Picard 数 $\rho(X) = 10$ である.

例

単有理曲面の特徴付けの例をいくつか挙げる.

(i) 標数 2 の Enriques 曲面 X に対して,

X が単有理曲面 $\Longleftrightarrow$ X が古典的又は超特異 Enriques 曲面 (P.Blass).

(ii) 準楕円曲面 $f : X \to C$ に対して,

X が単有理曲面 $\Longleftrightarrow C \cong \mathbf{P}^1$ (M.Miyanishi).

(iii) Fermat 曲面 $X_m : X_0^m + X_1^m + X_2^m + X_3^m = 0 \subset \mathbf{P}^3$ $(m \geq 4, (p, m) = 1))$ に対して, 次のような同値が成り立つ:

X_m が単有理曲面 $\Longleftrightarrow p^\nu \equiv -1 \pmod{m}$ となる自然数 ν が存在する (Shioda - Katsura).

K3 曲面については後に述べる

4 K3曲面

X: 非特異射影曲面
X: K3 曲面
$\Longleftrightarrow$
canonical bundle $K_X \cong \mathcal{O}_X$ かつ $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$

$\mathrm{NS}(X)$: X の Néron-Severi group
有限生成アーベル群　そのランクを Picard 数といい, $\rho = \rho(X)$ と書く.
K3 曲面に対しては, $1 \leq \rho(X) \leq 20$ または $\rho(X) = 22$

$\rho(X) = 22$ のとき, その内積の discriminant は $-p^{2\sigma_0}$ の形.
σ_0 を Artin invariant という.
$1 \leq \sigma_0 \leq 10$ である.

$\sigma_0 = 1$ のとき, K3 surface を superspecial K3 surface という.

一般に, アーベル曲面 A を inversion ι で割った曲面 $A/<\iota>$ を resolution して得られた曲面 $\mathrm{Km}(A)$ を Kummer 曲面という.
Kummer 曲面は $p \neq 2$ ならば K3 曲面.

$p > 2$ のとき,
- X supersingular K3 曲面, $\sigma_0 \leq 2 \Leftrightarrow X = \mathrm{Kum}(A)$, A 超特異アーベル曲面
- superspecial K3 曲面 $X \cong \mathrm{Kum}(E \times E)$ (E: supersingular elliptic curve)
  superspecial K3 曲面は unique

予想 (Artin-Shioda) K3 曲面 X に対して,

$$X \text{ が単有理曲面} \Longleftrightarrow \rho(X) = b_2(X).$$

$\Rightarrow$ はすでに述べたように成立する. $\Leftarrow$ は次の場合に示せている.

(a) $p = 2$ のときは成立 (Rudakov-Shafarevich)
$p = 3$ かつ $\sigma_0 \leq 6$ のときは成立 (Rudakov-Shafarevich)
$p = 5$ かつ $\sigma_0 \leq 3$ のときは成立 (I. Shimada)

(b) $p \geq 3$ とする.
A: Abel 曲面, ι を A の反転 ($\iota(x) = -x$, $x \in A$).
商曲面 A/ι の極小非特異モデル $\mathrm{Km}(A)$: Kummer 曲面 (K3)
次の 3 条件は同値である (Shioda).
(i) $\mathrm{Km}(A)$ は単有理曲面である.
(ii) $\rho(\mathrm{Km}(A)) = b_2(\mathrm{Km}(A))$.
(iii) A は超特異 Abel 曲面である.

(c) $p \geq 7$ とする.

G を Abel 曲面 A に忠実に作用する有限群,

A/G の極小非特異曲面が K3 曲面になるとする.

それを $\mathrm{Km}(A, G)$ と書き一般化 **Kummer** 曲面という.

次の 3 条件は同値である (Katsura).

(i) $\mathrm{Km}(A, G)$ は単有理曲面である.

(ii) $\rho(\mathrm{Km}(A, G)) = b_2(\mathrm{Km}(A, G))$.

(iii) A は超特異 Abel 曲面である.

Artin-Mazur 形式群

X : 非特異射影多様体

Art : 体 k 上の局所 Artin 代数 R でその極大イデアルを m とするとき
$R/m \cong k$ となるもののなす圏

Ab : Abel 群のなす圏

Art の対象 R に対し, 自然な入射

$$f_R : X \cong X \times_{\mathrm{Spec}\, k} \mathrm{Spec}\, k \hookrightarrow X \times_{\mathrm{Spec}\, k} R$$

を考えれば, この入射はエタールコホモロジーの写像

$$f_R^* : \mathrm{H}^i_{et}(X \times_{\mathrm{Spec}\, k} R, \mathbf{G}_m) \longrightarrow \mathrm{H}^i_{et}(X, \mathbf{G}_m)$$

を引き起こす.

関手

$$\begin{array}{rccc} \Phi^i_X : & Art & \longrightarrow & Ab \\ & R & \longmapsto & \mathrm{Ker}\, f_R^* \end{array}$$

を考える.

定理 (Artin-Mazur)

X を非特異射影多様体とする.

$$\mathrm{H}^{i-1}(X, \mathcal{O}_X) = 0 \text{ かつ } \mathrm{H}^{i+1}(X, \mathcal{O}_X) = 0$$

ならば, Φ^i_X は形式群で前表現可能 (prorepresentable) であり,

その接空間は $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{O}_X)$ に同型である.

その covariant (Cartier-)Dieudinne module は $H^i(X, W(\mathcal{O}_X))$ で与えられる.

定義

Φ^i_X が形式群で前表現可能のとき，その形式群を **Artin-Mazur 形式群**といい，再び Φ^i_X と書く．

とくに $i=2$ であるとき，この形式群を形式的 **Brauer 群**という．

X を K3 曲面とする．

$\mathrm{H}^3(X,\mathcal{O}_X)=0$ かつ $\mathrm{H}^1(X,\mathcal{O}_X)=0$ であること，

また，$\dim \mathrm{H}^2(X,\mathcal{O}_X)=1$ であるから，

X の形式的 Brauer 群 Φ^2_X は 1 次元 formal group で prorepresentable

$h(X)<\infty$ ならば $\rho(X)\leq b_2(X)-2h(X)$ (L. Illusie)

K3 曲面の場合 $b_2(X)=22$ より，$1\leq h(X)\leq 10$ または $h(X)=\infty$ となる．

$h(X)=1$ のとき，X を ordinary K3 surface,

$h(X)=\infty$ のとき,X を超特異 K3 曲面 (supersingular K3 surface) という．

$\rho(X)=22$ となる K3 曲面を塩田の意味の超特異 (supersingular) であるという．

予想 (Artin) 超特異と塩田の意味の超特異は同値である．

(D. Maulik, F. Charles, K. M. Pera, Kim-M. Pera により解決)

Tate 予想を K3 曲面の時に考える．

予想 (Tate) X: 有限体 $\mathbf{F}_q$ 上の K3 曲面

NS(X): $\mathbf{F}_q$ 上の Neron-Severi 群，そのランク ρ

(1) 合同ゼータ関数 $Z(X/\mathbf{F}_q,T)$ の $T=q^{-1}$ における極の位数は ρ

(2) 自然な写像 $\mathbf{Q}_\ell\otimes \mathrm{NS}\longrightarrow \mathrm{H}^2_{et}(\bar{X}/\bar{\mathbf{F}}_q,\mathbf{Q}_\ell)^{Gal(\bar{\mathbf{F}}_q/\mathbf{F}_q)}$ は同型

(3) 自然な写像 $\mathbf{Q}_p\otimes \mathrm{NS}\longrightarrow \mathrm{H}^2_{cris}(X/W(\mathbf{F}_q))^{\phi=p}\otimes\mathbf{Q}$ は同型

(ϕ は crystalline cohomology の Frobenius map)

よく知られていた事実

Tate 予想

- $h(X)=1$ のとき，成立 (Nygaard)
- $h(X)<\infty$ のとき，$p\geq 5$ で成立 (Nygaard-Ogus)

Artin 予想

- irreducible variety 上の family の 1 つで成り立てば，family のすべてのメンバーに対して成り立つ (Artin)
- elliptic surface の構造を持てば成り立つ (Artin)

Tate 予想 $\Longrightarrow$ Artin 予想
$\mathbf{F}_q$ の q を十分大きくとれば, Picard 数 ρ は閉体 $\bar{\mathbf{F}}_q$ 上のものと一致する.
$W(\mathbf{F}_q)$ の商体を K とする.
$h = \infty$ (supersingular) とする.
このとき, $\Phi_X^2 \cong \hat{\mathbf{G}}_a$
(Cartier-)Dieudonne module $\mathrm{H}^2(X, W(\mathcal{O}_X))$ は torsion だから,
$\mathrm{H}^2_{cris}(X/W(\mathbf{F}_q)) \otimes_{W(\mathbf{F}_q)} K_{[0,1)} \cong \mathrm{H}^2(X, W(\mathcal{O}_X)) \otimes_{W(\mathbf{F}_q)} K = 0$
Poincaré duality から
$\mathrm{H}^2_{cris}(X/W(\mathbf{F}_q)) \otimes_{W(\mathbf{F}_q)} K_{(1,2]} = 0$
よって, $\mathrm{H}^2_{cris}(X/W(\mathbf{F}_q)) \otimes_{W(\mathbf{F}_q)} K$ は slope 1 の元からなる.
$\mathrm{H}^2_{cris}(X/W(\mathbf{F}_q))^{\phi=p}$ は slope 1 の部分空間を張るが
それらは Tate 予想 (3) より algebraic なので

$$b_2(X) = \rho \quad \text{(Artin 予想)}$$

となる.

Tate 予想は, D.Maulik, F.Charles, K.M.Pera, Kim-K.M.Pera により解決

標数 0 への持ち上げ問題
定義
商体が標数 0 の体 K で剰余体が k になるような離散付値環 $\mathcal{O}$ と,
Spec $\mathcal{O}$ 上の代数多様体 $\tilde{X}$ が存在して,
$\tilde{X} \otimes_{\mathcal{O}} K$ は代数多様体かつ $\tilde{X} \otimes_{\mathcal{O}} k \cong X$ となるとき,
X は標数 0 に持ち上げ可能 (liftable) という.

- K3 曲面は liftable (P. Deligne)

（狭義の）Calabi-Yau 多様体
$\Leftrightarrow \omega_X \cong \mathcal{O}_X, \mathrm{H}^i(X, \mathcal{O}_X) = 0 \ (0 < i < \dim X)$

問題. Calabi-Yau 多様体は liftable か?
答：No
反例: 3 次元で Hirokado ($p = 3$), Schroeer ($p = 2$), Hirokado-H.Ito-N.Saito ($p = 2, 3$)
Φ_X^3 のハイトを h とすると, これらの例はすべて $h = \infty$

•$h < \infty$ なら $W_2(k)$ まで lift できる (F. Yobuko)

問題 $p \geq 5$ とする. 3 次元 Calabi-Yau 多様体は liftable か?
高次元では, $p \geq 5$ でも P.Achinger-M. Zdanowicz の反例がある

K3 曲面のモジュライ空間

$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{2d}$: degree $2g$ の偏極をもつ K3 surface の moduli stack
. ($2g$ は p と互いに素とする)
$M^{(h)}$: height が h 以上の K3 surface の locus($1 \le h \le 10$)
M_σ: supersingular K3 で Artin invariant が σ 以下 locus ($1 \le \sigma \le 10$)
これらは代数的集合
$\dim M^{(h)} = 20 - h$, $\dim M_\sigma = \sigma - 1$

$$\mathcal{M} = M^{(1)} \supset M^{(2)} \supset \cdots \supset M^{(10)} \supset M_{10} \supset M_9 \supset \cdots \supset M_1$$

$\pi : \chi \longrightarrow \mathcal{M}$: polarized K3 surface の universal family
$\Omega^2_{\chi/\mathcal{M}}$: relative dualizing sheaf
$\mathrm{CH}^i_{\mathbf{Q}}(\mathcal{M})$: M の Chow group
$v = c_1(\pi_*(\Omega^2_{\chi/\mathcal{M}})) \in \mathrm{CH}^1_{\mathbf{Q}}(\mathcal{M})$: first Chern class

定理 (van der Geer - Katsura) $[M^{(h)}]$ の $\mathrm{CH}^{h-1}_{\mathbf{Q}}(\mathcal{M})$ での class は

$$[M^{(h)}] = (p-1)(p^2-1)\cdots(p^{h-1}-1)v^{h-1}$$

で与えられる.

証明には, h の次の特徴付けを使う.
補題. X を K3 曲面とする. X の h-数は Frobenius map F の $\mathrm{H}^2(X, W_i(\mathcal{O}_X))$ への作用が零写像にならない最小の i に等しい.

Remark (T. Ekedahl - G. van der Geer) M_σ の Chow group $\mathrm{CH}^{20-\sigma}_{\mathbf{Q}}(\mathcal{M})$ での class $[M_\sigma]$ は

$$[M_{10}] = \frac{1}{2}(p-1)\ (p^2-1)\cdots(p^{10}-1)v^{10}$$

$$[M_\sigma] = \frac{1}{2}\frac{(p^{2(11-\sigma)}-1)\ (p^{2(12-\sigma)}-1)\cdots(p^{20}-1)}{(p+1)\cdots(p^\sigma+1)}v^{20-\sigma} \quad (1 \le \sigma \le 9)$$

で与えられる.

5 Enriques 曲面

定義 X: 非特異射影曲面
X : Enriques 曲面 $\Leftrightarrow$ 第 2 Betti 数 $b_2(X) = 10$, $K_X \equiv 0$

$p \neq 2$ のとき
$\mathrm{Pic}^{\tau}(X) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$\varphi : \tilde{X} \longrightarrow X$ (次数 2 の étale covering)
$\tilde{X}$: K3 曲面
X は elliptic surface の構造を持つ: $f : X \longrightarrow \mathbf{P}^1$
f は 2 個の multiplicity 2 の multiple fibers を持つ
Picard number $\rho(X) = 10 = b_2(X)$ (塩田の意味の超特異)
moduli space の次元= 10 次元

$p = 2$ のとき
3 種類に分かれる.

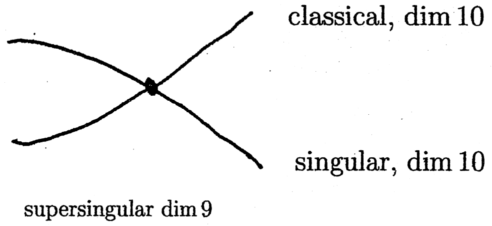
(i) $K_X \not\sim 0$, $K_X^{\otimes 2} \sim 0$, $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$
$\Longrightarrow$ 古典的 **Enriques** 曲面 (classical)

(ii) $K_X \sim 0$, Frobenius 写像 F が $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X) \cong k$ に全単射に作用
$\Longrightarrow$ 特異 **Enriques** 曲面 (singular)

(iii) $K_X \sim 0$, Frobenius 写像 F が $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X) \cong k$ に零写像として作用
$\Longrightarrow$ 超特異 **Enriques** 曲面 (supersingular)

$\mathrm{Pic}^{\tau}(X)$
(i) $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, (ii) μ_2, (iii) α_2
$\varphi : \tilde{X} \longrightarrow X$ (次数 2 の canonical covering)
$\tilde{X}$: K3-like ($\omega_X \cong \mathcal{O}_X$, $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$)
(i) μ_2-covering, (ii) $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-covering, (iii) α_2-covering
X は elliptic または quasi-elliptic surface の構造を持つ:
$f : X \longrightarrow \mathbf{P}^1$
(i) 2 つの multiplicity 2 の tame multiple fibers
(ii) 1 つの multiplicity 2 の wild fiber
(iii) 1 つの multiplicity 2 の wild fiber
Picard number $\rho(X) = 10 = b_2(X)$ (塩田の意味の超特異)

moduli space の次元= 10 次元 (Ekedahl ?, Liedtke 2010)



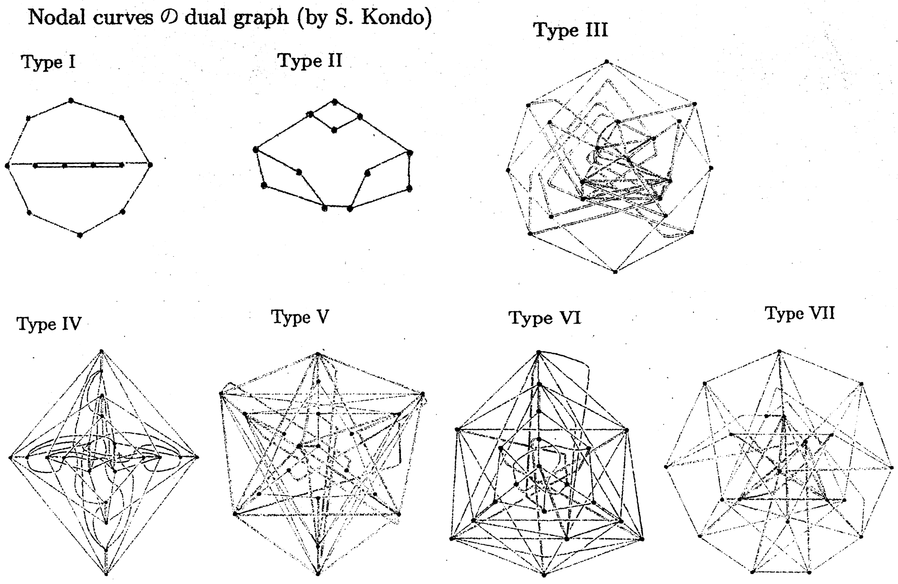
有限自己同型群をもつ Enriques 曲面の分類

$\star$ generic な Enriques 曲面の自己同型群は無限群

nodal curve ($C^2 = -2$ の有理曲線) のなす configuration で分類する

$p = 0$ の場合 (S. Kondo)
7 種類に分類できる.

Nodal curves の dual graph (by S. Kondo)



（図の作成は G. Martin による）

Enriques 曲面の構成方法

R : $\mathbf{P}^2$ または $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{X} & & \\ & f \swarrow & & \searrow \pi & \\ R & & & & X \end{array}$$

$\tilde{X}$ は K3 または K3-like
f, π は次数 2 の covering
X は Enriques, $\tilde{X}$ の商曲面

Purely inseparable covering の構成

X : nonsingular complete algebraic surface

$\{U_i = \text{Spec } A_i\}$: X の十分細かい affine open covering

$x_i,\ y_i$: U_i の local coordinates

D : non-zero rational vector field on X

D は U_i 上

$$D = h_i(f_i \frac{\partial}{\partial x_i} + g_i \frac{\partial}{\partial y_i})$$

と書ける.

ただし,

$f_i, g_i \in A_i$ は U_i 上の regular function で共通因子なし,

h_i は有理関数

イデアル (f_i, g_i) は貼り合わさって X 上の 0 因子を与える: $\langle D \rangle$ と書く

U_i 上の主因子 (f_i) は貼り合わさって X 上の因子を与える: (D) と書く

$$A_i^D = \{g \in A_i \mid D(g) = 0\} \quad \text{とおく.}$$

Spec A_i^D は貼り合わさって complete algebraic variety を与える:

$$X^D := \cup \text{ Spec } A_i^D$$

X^D は normal になる.

inclusion $A_i^D \hookrightarrow A_i$ からできる自然な商写像

$$\pi : X \longrightarrow X^D$$

$$\pi : X \longrightarrow X^D$$

定義 有理関数 f が存在して $D^p = fD$ となるとき, D を p-closed という.

D が p-closed のとき次が成り立つ.

- $\deg \pi = p$
- $c_2(X) = \deg\langle D\rangle - K_X \cdot (D) - (D)^2$
- X^D nonsingular $\Leftrightarrow$ $\langle D\rangle = 0$
- X^D が nonsingular のとき,
  $K_X \sim \pi^* K_{X^D} + (p-1)(D)$

$p > 0$ の場合

$p \neq 2$ なら $p = 0$ に現れるものしか出てこない.

定理 (G. Martin) $p \geq 3$ とする. 有限自己同型をもつ Enriques 曲面の nodal curves の dual graph は次の通りである.

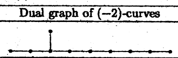
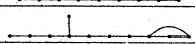
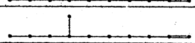
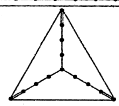
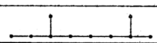
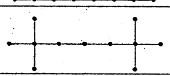
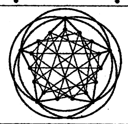
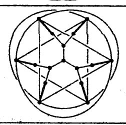
Type	I	II	III	IV	V	VI	VII
$p = 0$ or $p > 5$	○	○	○	○	○	○	○
$p = 5$	○	○	○	○	○	×	×
$p = 3$	○	○	○	○	×	×	○

定理 (Katsura-Kondo) $p = 2$ とする．有限自己同型群をもつ Enriques 曲面の nodal curves の dual graph で，$p = 0$ のときに現れるものは次の通りである．

Type	I	II	III	IV	V	VI	VII
singular	○	○	×	×	×	○	×
classical	×	×	×	×	×	×	○
supersingular	×	×	×	×	×	×	○

定理 (Katsura-Kondo) $p = 2$ とする．有限自己同型群をもつ classical Enriques 曲面の nodal curves の dual graph は次のように分類できる．

(a) Classification

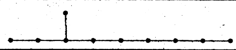
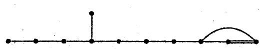
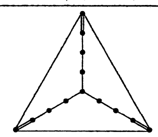
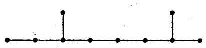
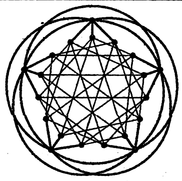
Type	Dual graph of (-2)-curves
$\tilde{E}_8$	
$\tilde{E}_7 + \tilde{A}_1^{(1)}$	
$\tilde{E}_7 + \tilde{A}_1^{(2)}$	
$\tilde{E}_6 + \tilde{A}_2$	
$\tilde{D}_8$	
$\tilde{D}_4 + \tilde{D}_4$	
VII	
VIII	

(b) Examples

$\mathrm{Aut}(X)$	$\mathrm{Aut}_{\mathrm{nt}}(X)$	dim
$\{1\}$	$\{1\}$	1
$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\{1\}$	2
$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	1
$\mathfrak{S}_3$	$\{1\}$	1
$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	2
$(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3$	$(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$	2
$\mathfrak{S}_5$	$\{1\}$	1
$\mathfrak{S}_4$	$\{1\}$	1

定理 (Katsura-Kondo) $p = 2$ とする．有限自己同型群をもつ supersingular Enriques 曲面の nodal curves の dual graph は次のように分類できる．

(a) Classification

Type	Dual graph of (-2)-curves
$\tilde{E}_8$	
$\tilde{E}_7 + \tilde{A}_1^{(1)}$	
$\tilde{E}_6 + \tilde{A}_2$	
$\tilde{D}_8$	
VII	

(b) Examples

$\mathrm{Aut}(X)$	$\mathrm{Aut}_{\mathrm{ct}}(X)$	dim
$\mathbf{Z}/11\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}/11\mathbf{Z}$	0
$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ or $\mathbf{Z}/14\mathbf{Z}$	$\{1\}$ or $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$	1 or 0
$\mathbf{Z}/5\mathbf{Z} \times \mathfrak{S}_3$	$\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$	0
Q_8	Q_8	1
$\mathfrak{S}_5$	$\{1\}$	0

参考文献

[1] P. Achinger and M. Zdanowicz, Non-liftable Calabi-Yau varieties in characteristic ≥ 5, arXiv:1710.08202.

[2] M. Artin and B. Mazur, Formal groups arising from algebraic varieties, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 10 (1977), 87–132.

[3] M. Artin and D. Mumford, Some elementary examples of unirational varieties which are not rational, Proc. London Math. Soc., 25 (1972), 75-95.

[4] P. Blass, Unirationality of Enriques' surfaces in characteristic two, Compositio Math., 45 (1982), 393-398.

[5] E. Bombieri and D. Mumford, Enriques' classification of surfaces in char. p, II, in "Complex Analysis and Algebraic Geometry", A collection of papers dedicated to K. Kodaira (W. L. Baily, Jr. and T. Shioda, eds.), Iwanami Shoten Publishers, Tokyo and Princeton Univ. Press, Cambridge (1977), 23-42; III, Invent. Math., 36 (1976), 197-232.

[6] F. Charles, The Tate conjecture for K3 surfaces over finite fields, Invent. Math., 194 (2013), 119-145.

[7] C. H. Clemens and P. A. Griffiths, The intermediate Jacobian of the cubic threefold, Ann. of Math., 95(1972), 281-356.

[8] R. M. Crew, Etale p-covers in characteristic p, Compositio Math., 52 (1984), 31-45.

[9] P. Deligne, Relèvement des surfaces K3 en caractéristique nulle, Lect. Notes in Math. 868, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1981), 58-79.

[10] M. Demazure and P. Gabriel, Groupes algébriques, tome 1, North-Holland, Amsterdam 1970.

[11] T. Ekedahl, Sur le group fondamental d'une variété unirationnelle, C. R. Acad. Sci. Paris, 297 (1983), 627-229.

[12] K. Hashimoto and I. Ibukiyama, On the class numbers of positive definite binary quaternion hermitian form (I), J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, 27 (1980), 549–601.

[13] M. Hazewinkel, Formal Groups and Applications, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1978.

[14] M. Hirokado, A non-liftable Calabi-Yau threefold in characteristic 3, Tohoku Math. J., 51 (1999), 479-487.

[15] L. Illusie, Complexe de de Rham Witt et cohomologie cristalline, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 4e série, 12 (1979), 501-661.

[16] V. A. Iskovskikh and Ju. I. Manin, Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem, Math. Sb., 86 (1971), 141-166.

[17] T. Katsura, Surfaces unirationnelles en caractéristique p, C.R. Acad. Sci. Paris, 288 (1979), 45-47.

[18] T. Katsura, Unirational elliptic surfaces in characteristic p, Tôhoku Math. J., 33 (1981), 521-553.

[19] T. Katsura, The unirationality of certain elliptic surfaces in characteristic p, Tôhoku Math. J., 36 (1984), 217-231.

[20] T. Katsura, Generalized Kummer surfaces and their unirationality in characteristic p, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., 34 (1987), 1–41.

[21] T. Katsura, The Chern map on abelian surfaces, J. Algebra, 425 (2015), 85–106.

[22] 桂 利行, 楕円曲面, 岩波書店, 2022.

[23] T. Katsura and S. Kondo, On Enriques surfaces in characteristic 2 with a finite group of automorphisms, submitted.

[24] T. Katsura, S. Kondo and G. Martin Classification of Enriques surfaces with finite automorphism groups in characteristic 2, in preparation.

[25] T. Katsura and F. Oort, Families of supersingular abelian surfaces, Compositio Math., 62 (1987), 107-167.

[26] T. Katsura and F. Oort, Supersingular abelian varieties of dimension two or three and class numbers, Advanced Studies in Pure Math. 10, Kinokuniya and North-Holland 1987, 253-281

[27] T. Katsura and K. Ueno, On elliptic surfaces in characteristic p, Math. Ann., 272 (1985), 291-330.

[28] W. Kim and K. Madapusi Pera, 2-adic integral canonical models and the Tate conjecture in characteristic 2, Forum Math. Sigma 4 (2016), e28, 34.

[29] S. Kondō, Enriques surfaces with finite automorphism groups, Japanese J. Math., 12 (1986), 191–282.

[30] H. Kurke, On Castelnuovo's criterion for rational surfaces, in "Proc. Intern. Symp. on Algebraic Geometry", Kyoto, 1977, (M. Nagata, ed.), Kinokuniya, Tokyo 1978, 557-563.

[31] W. E. Lang, A short proof of Castelnuovo's criterion of rationality, Trans. Amer. Math. Soc., 264 (1981), 579-582.

[32] K.-Z. Li and F. Oort, Moduli of Supersingular Abelian Varieties, LNM 1680, Springer, 1998.

[33] C. Liedtke, Arithmetic moduli and lifting of Enriques surfaces, J. Reine Angew. Math. 706 (2015), 35-65.

[34] Y. Matsumoto, 志村多様体と K3 曲面：Tate 予想への応用, 整数論サマースクール 2015 報告集, 2016.

[35] Yu. I. Manin, The theory of commutative formal groups over fields of finite characteristic, Uspekhi Mat. Nauk, 18 (1963), 3-90; Russian Math. Surveys, 18 (1963), 3-83.

[36] G. Martin, Enriques surfaces with finite automorphism group in positive characteristic, Algebraic Geometry, 6 (2019), 592-649.

[37] D. Maulik, Supersingular K3 surfaces for large primes, Duke Math. J., 163 (2014), 2357-2415.

[38] M. Miyanishi, Unirational quasi-elliptic surfaces in characteristic 3, Osaka J. Math., 13 (1976), 513-522.

[39] M. Miyanishi, Unirational quasi-elliptic surfaces, Japan. J. Math., 3 (1977), 395-416.

[40] D. Mumford, Lectures on Curves on Algebraic Surfaces, Princeton (1966).

[41] D. Mumford, Enriques' classification in char. p, I, in "Global Analysis" (D. C. Spencer, S. Iyanaga eds.), Tokyo Univ. Press and Princeton Univ. Press, 1969, 325-339.

[42] P. Norman and F. Oort, Moduli of abelian varieties, Ann. of Math., 112 (1980), 413-439.

[43] N. O. Nygaard, The Tate conjecture for ordinary K3 surfaces, Ann. of Math., 110 (1979), 515-528.

[44] N. O. Nygaard and A. Ogus, Tate's conjecture for K3 surfaces over finite fields, Invent. Math., 74 (1983), 213-237.

[45] T. Oda, The first de Rham cohomology group and Dieudonné modules, Ann. Sci. ENS, 4^e série, t.2, (1969), 63-135.

[46] 小田忠雄, Dieudonné module について, 数理解析研究所講究録 no53, (1968) 170-191.

[47] T. Oda and F. Oort, Supersingular abelian varieties, Intl. Symp. on Algebraic Geometry, Kyoto (1977)(M. Nagata, ed.), Kinokuniya Book-store (1978), 595-621.

[48] F. Oort, Which abelian varieties are products of elliptic curves?, Math. Ann. 214 (1975), 35–47.

[49] K. Madapusi Pera, The Tate conjecture for K3 surfaces in odd characteristic, Invent. Math., 201 (2015), 625-668.

[50] A. N. Rudakov and I. R. Shafarevich, Inseparable morphisms of algebraic surfaces, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 40 (1976), 1269–1307.

[51] A. N. Rudakov and I. R. Shafarevich, Supersingular K3 surfaces over fields of characteristic 2, Math. USSR-Izv., 13 (1979), 147–165.

[52] S. Schroeer, Some Calabi-Yau threefolds with obstructed deformations over the Witt vectors, Compos. Math., 140 (2004), 1579-1592.

[53] J.-P. Serre, On the fundamental group of unirational variety, J. London Math. Soc., 34 (1959), 481-484.

[54] J.-P. Serre, Exemples de variétés projectives en caractéristique p non relevables en caractéristique zéro, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 47 (1961), 108-109. bitemShi4 T. Shioda, An example of unirational surfaces in characteristic p, Math. Ann., 211 (1974), 233-236.

[55] T. Shioda, On unirationality of supersingular surfaces, Math. Ann., 225 (1977), 155-159.

[56] T. Shioda, Some results on unirationality of algebraic surfaces, Math. Ann., 230 (1977), 153-168.

[57] T. Shioda, Superingular K3 surfaces, Algebraic Geometry, Proc. Copenhagen 1978 (K. Lønsted, ed.), Lecture Notes in Math. 732, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1979, 564-591.

[58] T. Shioda and T. Katsura, On Fermat varieties, Tôhoku Math. J., 31 (1979), 97-115.

[59] N. Suwa, De Rham cohomology of algebraic surfaces with $q = -p_a$ in char. p, in "Algebraic Geometry", Lect. Notes in Math. 1016, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1982), 73-85.

[60] N. Suwa, A. note on the fundamental group of a unirational variety, Proc. Japan Acad., 59 (1983), 98-99.

[61] J. Tate, Genus change in inseparable extensions of function fields, Proc. Amer. Math. Soc., 3 (1952), 400-406.

[62] J. Tate, p-Divisible Groups, in Proc. of Conf. on Local Fields (T. A. Springer, ed.), NUFFIC Summer School held at Driebergen (The Nehtherlands) in 1966, (1967), 158-183.

[63] B. Totaro, Recent progress on the Tate conjecture, Bull. Amer. Math. Soc., 54 (2017), 575-590.

[64] G. van der Geer and T. Ekedahl, Cycle classes on the moduli of K3 surfaces in positive characteristic, Selecta Math., 21 (2011), 245-291.

[65] G. van der Geer and T. Katsura, On a stratification of the moduli of K3 surfaces, J. Eur. Math. Soc., 2 (2000), 259-290.

[66] O. Zariski, On Castelnuovo's criterion of rationality $p_1 = P_2 = 0$, Illinois J. Math., 2 (1958), 303-315.