

光の波面の幾何学から

20th Oka Symposium

奈良女子大学

宮岡礼子* (東北大学)

概要

等径超曲面の概要, 分類から始め, Gauss 写像の像の作る Lagrange 部分多様体の交叉に関する Arnold-Givental 予想の部分解決に触れる. さらに過剰決定系として知られる Pompeiu 問題との関わりについて, 講演では述べなかったことも含め記す. 最後に筆者のこの他の研究概要に関するスライドを掲載する.

1 序

イタリアの幾何光学者が 1920 年代に始めた光の波面の幾何学である等径超曲面は, É. Cartan により系統的に研究され, ユークリッド空間と双曲空間では同心球面族と同心シリンダー族で尽くされることが示された. 他方, 球面内では非自明な無限個の例が現れることが知られ, Münzner はその研究の基礎を築き, 分類は 2020 年に漸く完成した.

その面白さをひとつだけ述べれば, 群作用 (対称性) のある空間の作用不変な微分方程式が軌道空間に落とすことで単純化されるように, 等径超曲面族により生じる特異フォリエーションによってある種の解析が容易になることである.

そこであまり知られていないこの等径超曲面を紹介し, その幾何学的側面を述べた後, 解析的観点からは Pompeiu 問題に関する最近の結果を紹介する.

後半では筆者のこれ以外の研究にも触れる.

*科研費 基盤研究 C 21K03214

2 等径超曲面を紹介

以前, 数学 [21], RIMS 講究録 [22] で等径超曲面について解説しているので, ここではより直感的な説明を簡潔に行う.

リーマン多様体上の平行超曲面族とは, 法方向へ速度一定で膨らむ (縮む) 超曲面族のことである. したがって図 1 の左二つはユークリッド空間内の平行族であるが, 図 2 の曲線は法方向への進行速度が一定でないから, 平行族ではない.

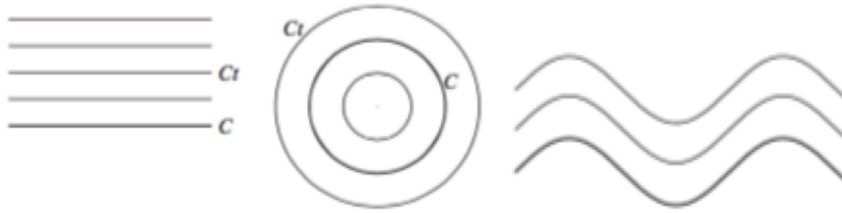


図 1: 平行

図 2: 非平行

平行性は Huygens の原理「進行波面は各出発点での小波面の包絡面として得られる」ことを, 波の進行速度一定の場合に数学的に述べたものである (図 3).

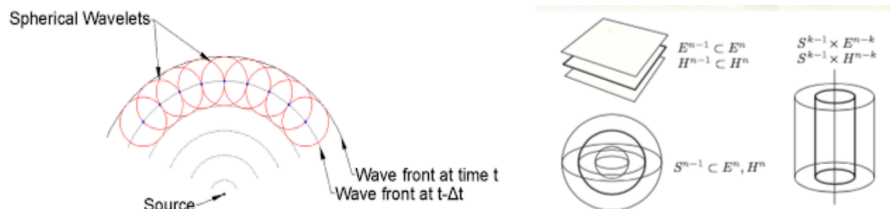


図 3: Huygens の原理

図 4: E^n と H^n の等径超曲面

定義. リーマン多様体 N の平均曲率一定 (CMC) 超曲面からなる平行族があるとき, その各超曲面を等径超曲面という. ここで平均曲率とは法方向への変分が超曲面の面積を減らす (増やす) 率を表す量で, 型作用素のトレースで与えられる. 特に平均曲率 0 のとき, 極小部分多様体という.

定理 2.1 (É. Cartan [3] 1938) E^n と H^n の等径超曲面は, 同心超球面 S^{n-1} (全測地的を含む) と円筒 $S^{k-1} \times E^{n-k}$, $S^{k-1} \times H^{n-k}$ のみである ($1 < k < n$, 図 4). いずれも等質超曲面 (群作用の軌道) である.

対照的に, 球面

$$S^n = \{x = (x_0, \dots, x_n) \mid |x| = 1\}$$

には、無限個の等質、非等質な等径超曲面が存在する。Cartan は等質例をいくつか見つけ、尾関秀樹-竹内勝は無限個の等質例および非等質例を発見した [31].

3 球面の等径超曲面

S^n の等径超曲面 M には波源にあたる焦部分多様体とよばれる部分多様体 M_{\pm} が必ず二つ存在して、 M は M_{\pm} を心棒とする半径一定のチューブの表面で与えられる。チューブの半径が変化していくことにより、 S^n を覆い尽くす。

以下の図では M_{\pm} を記している。最も簡単な例が、 $M_+ =$ 北極、 $M_- =$ 南極で、波面はそこから発する超球面 S^{n-1} である (図5)。

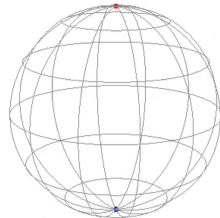


図 5: S^n の波源

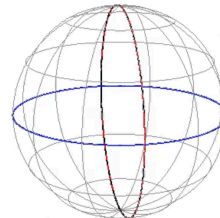


図 6: Clifford 超曲面の波源

次に簡単なのは、**Clifford** 超曲面とよばれる二つの球面の直積 $M = S^{k-1}(r) \times S^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$ であり、焦部分多様体は全測地的球面 $M_+ = S^{k-1}(1)$ と $M_- = S^{n-k}(1)$ である ($1 < k < n$, 図6)。

以後鍵となる数が、相異なる主曲率の個数 g である。主曲率とは型作用素の固有値のことであり、 g は直感的には曲がり方の種類を表す。 $S^{n-1}(r)$ なら $g = 1$, $S^{k-1}(r) \times S^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$ なら $g = 2$ である。 E^n と H^n では g は 1 か 2 のみである [3] のに対して、 S^n では、さらに $g = 3, 4, 6$ をもつ等径超曲面が存在して、 g はこれ以外の値はとらない [28].

以降、図は M_{\pm} の任意の法測地線ののっている平面に射影して表す (図5 ~ 9 は、元々 M_+ を出発して M_- に至る波面の動画で、藤森祥一広島大学教授による)。

$g = 3$ の等径超曲面は、焦部分多様体 M_{\pm} が Veronese 曲面とよばれる射影平面 $\mathbb{F}P^2$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$) の S^4, S^7, S^{13}, S^{25} への標準埋め込みであり、 M はその上のチューブである。 N は等質で、Cartan により発見、分類がなされたので、**Cartan** 超曲面とよばれている (図7)。

$g = 4$ の場合は最も豊富で興味深く、無限個の等質、非等質な等径超曲面が現れる。これらは Clifford 環の表現に関係している (図8, 7節参照)。

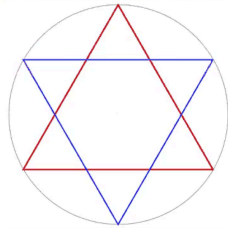


図 7: $g = 3$ の波源 : Veronese 曲面

$g = 6$ の等径超曲面は二つのみ, いずれも等質で, 対称空間 $G_2/SO(4)$ または $G_2 \times G_2/G_2$ のイソトロピー軌道である (図 9, 8 節参照).

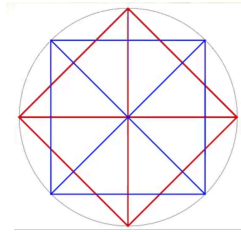


図 8: $g = 4$ の波源

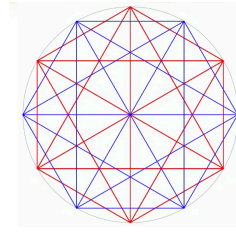


図 9: $g = 6$ の波源

4 イソトロピー軌道

空間形では, 等径超曲面は主曲率一定超曲面と同値であることが知られている. 等質超曲面の主曲率は一定であるから, 任意の等質超曲面は等径超曲面である. S^n の等質超曲面は, 階数 2 のコンパクト型対称空間のイソトロピー軌道で与えられ (Hsiang-Lawson [14] 1971), すべて分類されている ([14], Takagi-Takahashi [39] 1972, et al.).

イソトロピー軌道を説明しよう. G/K を階数 2 のコンパクト型対称空間とする.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$$

を G の Lie 環 \mathfrak{g} の Cartan 分解, ここに \mathfrak{k} は K の Lie 環, \mathfrak{p} は Killing 形式による自然な計量に対する \mathfrak{k} の直交補空間とする. このとき K は随伴作用で \mathfrak{p} に等長的に作用する. よって $\text{Ad}K$ 軌道が \mathfrak{p} の単位球面 S^n 上に現れ, 一般軌道は S^n の超曲面となる.

定理 4.1 (Hsiang-Lawson [14]) S^n の全ての等質超曲面は, こうして得られる

5 等径関数と Cartan-Münzner 多項式

等径超曲面族は等質か否かに関わらず, 次の (a), (b) をみたす等径関数とよばれる関数 f の等位面として記述できる.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \Delta f + p(f) &= 0 \\ \text{(b)} \quad |\nabla f|^2 + q(f) &= 0 \end{aligned}$$

ここに p, q は 1 変数関数. またラプラシアンは $\Delta f = -\operatorname{div} \nabla f$ で定義しておく. (Ferus らの論文 [9] では符号が逆のラプラシアンを使っているが問題は生じない.) (b) は等位面が互いに平行であることを意味し (図 10), (a) は (b) とあわせると等位面が CMC であることを意味する.

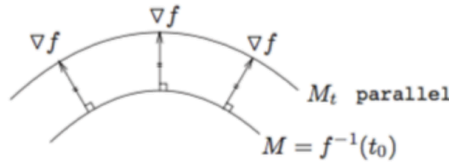


図 10: 等位面

S^n の等径関数 f は, ふたつの PDE をみたす \mathbb{R}^{n+1} 上の次数 g の斉次多項式: **Cartan-Münzner** 多項式 F を S^n に制限して得られる: $f = F|_{S^n} : S^n \rightarrow [-1, 1]$. $M_{\pm} = f^{-1}(\pm 1)$ に注意しよう.

$$g = 1: F(x) = \sum_{i=0}^n a_i x_i, \quad x = (x_0, \dots, x_n).$$

$$g = 2: F(x) = |u|^2 - |v|^2, \quad x = (u, v) \in \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{n-k+1}$$

$$g = 3: \mathbb{R}^5, \mathbb{R}^8, \mathbb{R}^{14}, \mathbb{R}^{26} \text{ 上の斉次 3 次式}$$

$$g = 4: \text{無限個の斉次 4 次式 (7 節参照)}$$

$$g = 6: \mathbb{R}^8, \mathbb{R}^{14} \text{ 上の斉次 6 次式}$$

6 Clifford 環と Clifford 系

$g = 4$ では Clifford 環が現れる. \mathbb{R}^l 上の Clifford 環 \mathcal{C}_{m-1} は,

$$E_i E_j + E_j E_i = -2\delta_{ij} \operatorname{id} \quad (1)$$

をみたす \mathbb{R}^l の歪対称直交変換 $E_1, \dots, E_{m-1} \in O(l)$ からなる. $\mathbb{R}^{2l} = \mathbb{R}^l \oplus \mathbb{R}^l$ の対称直交変換を

$$P_0(u, v) = (u, -v), \quad P_1(u, v) = (v, u), \quad P_{1+j}(u, v) = (E_j v, -E_j u) \quad (2)$$

で定めると, $P_j \in O(2l)$ は

$$P_i P_j + P_j P_i = 2\delta_{ij} \text{id}, \quad i, j = 0, \dots, m \quad (3)$$

をみます. $\{P_0, \dots, P_m\}$ を **Clifford 系** とよぶ.

Clifford 系は Clifford 環の表現と 1 対 1 に対応している.

7 OT-FKM 型等径超曲面

Clifford 系に付随して, 4 次の **Cartan-Münzner 多項式** は

$$F(x) = |x|^4 - 2 \sum_{i=0}^m \langle P_i x, x \rangle^2 \quad (4)$$

で与えられ, $0 < l - m - 1$ のとき $g = 4$ の等径超曲面 $F^{-1}(t) \cap S^{2l-1}$, $t \in (-1, 1)$ を得る.

対 (m, l) は無限に存在し, $m \leq l$ をみますが, さらに $0 < l - m - 1$ を仮定すると, 主曲率 $\lambda_1 > \dots > \lambda_4$ の重複度は $m_{\text{odd}} = m, m_{\text{even}} = l - m - 1$ で与えられる.

こうして得られる等径超曲面を **OT-FKM 型** (Ozeki-Takeuchi [31], Ferus-Karcher-Münzner[9]) という. (4) は本質的に尾関-竹内により得られ, これが無限個の等質, 非等質超曲面を含んでいることも, 彼らにより初めて指摘された [31].

8 S^n の等径超曲面の完全な分類

S^n の等径超曲面は次で尽くされる.

$g = 1$: S^{n-1} , 超球面

$g = 2$: $S^{k-1} \times S^{n-k}$ ($1 < k < n$), Clifford 超曲面

$g = 3$: Cartan 超曲面: $\mathbb{F}P^2$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$) 上のチューブの表面

$g = 4$: OT-FKM 型か, OT-FKM 型でない 2 つの等質な超曲面

Cecil-Chi-Jensen, Ann. of Math. 2007, Chi, J.D.G. 2020

$g = 6$: 重複度は $m_i = m = 1$ または 2 [1] で, どちらも等質

$m = 1$: Dorfmeister-Neher, 1985

$m = 2$: 宮岡, **Ann. of Math. 2013, 2016**

$g = 4$ では最終的に 4 元数, 8 元数を扱う場合が残り, 複雑で注意深い計算が必要となる [6].

最後の $(g, m) = (6, 2)$ の等質性の証明は非常に困難である. $m = 1$ であれば主曲率方向からなるフレームは向きを除いて一意に決まるが, $m = 2$

では主曲率分布においてフレームの取り方に S^1 の自由度があり、さらにその主曲率分布が6つもあるので、よいフレームを見つけることがほぼ等質性の証明となる。そのためには超曲面の大域性質、各リーフが互いにどう交わるかといったことを調べねばならない [24], [25].

9 等径超曲面の位相

S^n の等径超曲面 M の位相は、Münzner が $H^*(M, \mathbb{Z}_2)$, $H^*(M_{\pm}, \mathbb{Z}_2)$ を計算した [29]. これは S^n が $M_{\pm} = f^{-1}(\pm 1)$ 上の2つの円板束 $\Omega_{\pm t} = \{f \geq t\}$ に分解されることを用いて示され、 $g = 1, 2, 3, 4, 6$ が導出された。ここに $f: S^n \rightarrow [-1, 1]$ は等径関数、 $t \in (-1, 1)$ である。

他方、 M は球面上の球面束の繰り返しで得られるので、Thom-Gysin の完全系列を用いた新しい証明もある [26]. この別証のきっかけは M の Gauss 像の位相を調べることである。

10 S^n の超曲面の Gauss 像

S^n の超曲面 M の単位法ベクトル場を \mathbf{n} とする。 M の $\mathbf{x} \in M$ における Gauss 写像 \mathcal{G} は

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \wedge \mathbf{n} \in \text{Gr}_+(2, \mathbb{R}^{n+1})$$

で与えられる。ここに有向平面の作る Grassmann 多様体 $\text{Gr}_+(2, \mathbb{R}^{n+1})$ は複素2次超曲面

$$Q_{n-1}(\mathbb{C}) = \{[z_0, \dots, z_n] \in \mathbb{C}P^n \mid z_0^2 + \dots + z_n^2 = 0\}$$

と

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{n} \mapsto [\mathbf{x} + \sqrt{-1}\mathbf{n}] \in Q_{n-1}(\mathbb{C})$$

により同一視される。

さて、 $Q_{n-1}(\mathbb{C})$ は Kaehler 多様体であるから、symplectic 多様体である。

定理 10.1 (B. Palmer [32]) M が S^n の等径超曲面のとき、Gauss 像 $L = \mathcal{G}(M)$ は $Q_{n-1}(\mathbb{C})$ の極小 Lagrange 部分多様体である。

この結果により、等径超曲面が Gauss 写像を通じて symplectic 幾何と関わってくる。特に次の予想は興味深い。

【Lagrange 部分多様体 L の交叉に関する Arnold-Givental 予想】

$$\sharp(L \cap \varphi(L)) \geq SB(L, \mathbb{Z}_2) \quad (5)$$

ここに φ は Hamilton 微分同相 (12 節), SB は Betti 数の総和 (\mathbb{Z}_2 係数), 交叉は横断的であるとする.

11 Symplectic 幾何の復習

非退化閉 2 形式 ω を持つ多様体 (X^{2n}, ω) を **symplectic 多様体** という. また, $\iota: L \rightarrow X$ が **Lagrange 部分多様体** であるとは, $\dim L = n$ で, $\iota^*\omega = 0$ をみたすことである.

例 1. 任意の Kähler 多様体, 従って任意の曲面は symplectic 多様体. 曲面上, 任意の曲線は Lagrange 部分多様体.

例 2. 余接束. L を多様体 とするとき, 余接束 $\pi: T^*L \rightarrow L$ は symplectic 多様体. そもそも力学の相空間が symplectic 幾何の起源である. ここに $(x^1, \dots, x^n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ を T^*L の標準座標とすると, $\omega = dx^i \wedge d\xi_i$.

【 T^*L の Lagrange 部分多様体の例】

1. L : 底多様体.
2. $\pi^{-1}(x)$, $x \in L$ 上のファイバー.
3. $f \in C^\infty(L)$ に対して $L_f = \{(x, df(x))\}$ を **Lagrange グラフ** という. 実際 $df = f_i dx^i$ であるから $\omega|_{L_f} = dx^i \wedge df_i = dx^i \wedge f_{ij} dx^j = 0$.

このとき $L \cap L_f = \{(x, 0)\}$ より, $L \cap L_f$ は f の臨界点. よって L が閉で, f が Morse 関数ならば直ちに次を得る.

$$\sharp(L \cap L_f) \geq SB(L, \mathbb{Z}_2).$$

L_f は L の Hamilton 変形 (次節) の特別な場合と思えるので, T^*L を一般の symplectic 多様体 X に, L を X の Lagrange 部分多様体に, そして L_f を L の Hamilton 変形 $\varphi(L)$ に一般化する.

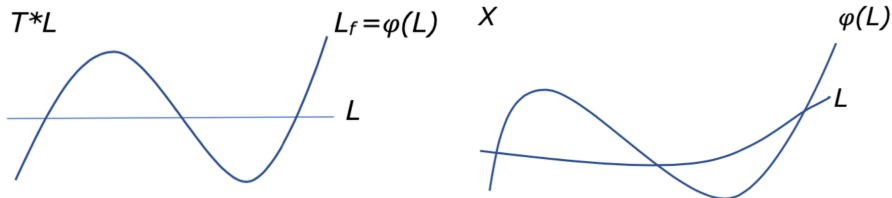


図 11: Lagrange グラフ

図 12: 一般化

12 Hamilton 微分同相と Arnold-Givental 予想

(X, ω) を閉 symplectic 多様体, $H : [0, 1] \times X \rightarrow \mathbb{R}$ を時間依存する Hamilton 関数で, $dH_t = \omega(\cdot, X_{H_t})$, ここに X_{H_t} は $H_t = H(t, \cdot)$ の Hamilton ベクトル場, φ_t^H を X_{H_t} の Hamilton フローとする.

定義. $t = 1$ のときの $\varphi = \varphi_1^H$ を X の **Hamilton 微分同相** という.

$\text{Ham}(X, \omega) = \{\varphi = \varphi_1^H \mid H \in C^\infty([0, 1] \times X)\}$
 $\subset \text{Sym}_0 = \{\text{恒等写像にアイソトピックな symplectic 写像}\}$
 である.

$\varphi \in \text{Ham}(X, \omega)$ に対して $\varphi^*\omega = \omega$ であるから, L が Lagrange 部分多様体ならば $\varphi(L)$ も Lagrange 部分多様体である.

【Arnold-Givental 予想】

交叉が横断的ならば次が成り立つ:

$$\#(L \cap \varphi(L)) \geq \text{SB}(L, \mathbb{Z}_2), \quad \varphi \in \text{Ham}(X, \omega). \quad (6)$$

注意 12.1 一般にはこの予想は成り立たない.

実際, S^2 の小円 S^1 については, ある $\varphi \in \text{Ham}(S^2, \omega)$ が存在して $\#(S^1 \cap \varphi(S^1)) = 0 < 2 = \text{SB}(S^1, \mathbb{Z}_2)$.

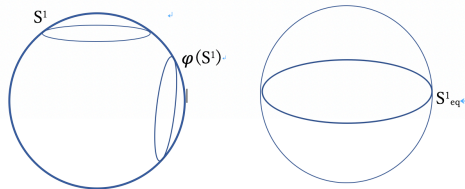


図 13: 小円, 大円

他方, 大円 S_{eq}^1 に対しては, $\varphi(S_{\text{eq}}^1)$ は S_{eq}^1 と必ず交わる. なぜなら φ は面積を保つから. よって $\#(S_{\text{eq}}^1 \cap \varphi(S_{\text{eq}}^1)) \geq \text{SB}(S_{\text{eq}}^1, \mathbb{Z}_2)$.

このように微妙な Arnold-Givental 予想の解決のため Floer (co)homology $HF(L)$ が導入された. $HF(L)$ は交叉 $L \cap \varphi(L)$ で生成されるので $L \cap \varphi(L) = \emptyset$ ならば $HF(L) = 0$ と自明になる. よって次の概念が重要となる.

定義.

1. ある $\varphi \in \text{Ham}(M, \omega)$ に対して $L \cap \varphi(L) = \emptyset$ のとき, L は **Hamilton 交叉解消性** をもつという. 例. S^2 の小円.
2. どの $\varphi \in \text{Ham}(M, \omega)$ に対しても, $L \cap \varphi(L) \neq \emptyset$ のとき, L は **Hamilton 交叉非解消性** をもつという. 例. S^2 の大円.

13 等径超曲面の Gauss 像

S^n の等径超曲面 M の $Q_{n-1}(\mathbb{C})$ 内の Gauss 像 $L = \mathcal{G}(M)$ は $L \cong M/\mathbb{Z}_g$ をみたすことが容易に示せる [19].

$g = 1$ のとき $M = S^{n-1}$, $L = S^{n-1} \subset Q_{n-1}(\mathbb{C})$ は実型.

$g = 2$ のとき $M = S^{k-1} \times S^{n-k}$, $L = S^{k-1} \times S^{n-k}/\mathbb{Z}_2$ ($1 < k < n$) は実型

定理 13.1 (Y. G. Oh [30] 1995, 入江博-酒井高司-田崎博之 [16] 2013) $g = 1, 2$ のとき次がなりたつ :

$$HF(L) \cong H^*(L, \mathbb{Z}_2) \text{ および } \sharp(L \cap \varphi(L)) \geq SB(L, \mathbb{Z}_2).$$

$g \geq 3$ のときはどうか?

命題 13.2 (Münzner [28]) $g \geq 3$ のとき, 主曲率 $\lambda_1 > \dots > \lambda_g$ の重複度 m_i は (m_1, m_2) , $m_{i+2} = m_i$ で与えられる.

定理 13.3 (入江-H.Ma-宮岡-大仁田義裕 [15] 2016) (1) $g = 3$ のとき $L = \mathcal{G}(M)$ は \mathbb{Z}_2 -homology 球面である. また $m = m_i \geq 2$ のとき,

$$HF(L) \cong H^*(L, \mathbb{Z}_2) \text{ および } \sharp(L \cap \varphi(L)) \geq SB(L, \mathbb{Z}_2)$$

がなりたつ.

(2) $g = 4, 6$ で $m_2 \geq m_1 \geq 2$ のとき L は Hamilton 交叉非解消性をもつ.

証明の概要: M の位相はよくわかっているので, 被覆 $M \rightarrow L = M/\mathbb{Z}_g$ に Damian の **lifted Floer homology** [7] と spectral 系列を使い (入江氏のアイディア), $HF(L) = 0$ を仮定して矛盾を導く.

注意 13.4 $HF(L)$ を定めるには, L は **monotone** が必要だがこれは常にみたされる. 他方, 最小 Maslov 数 N_L が 2 より大きいことが必要. このため次の未解決部分がある.

【未解決部分】

$N_L = 2$ となる次の場合は未解決である.

(1) $g = 4$, $(m_1, m_2) = (1, k)$

(2) $g = 6$, $m_1 = 1$

(3) $HF(L)$ は $g = 3$, $m_1 = 1$, $g = 4, 6$ の場合, 得られていない.

注意 13.5 実は $g = 4, 6$ については, 特異 cohomology $H^*(L, \mathbb{Z}_2)$ も簡単には求まらない. $L \cong M/\mathbb{Z}_g$ において, g が素数でない場合の考察は非自明である [26].

14 解析の話題

以下では等径超曲面に関する解析の問題について A. Savo らの研究を紹介する.

【Pompeiu 問題 [33] 1929】 (2023 年現在未解決)

E^n の単連結 Lipschitz 領域 Ω ($n \geq 2$) を考える. $u \in C^0(E^n)$, $u \not\equiv 0$ が存在して, E^n のすべての運動 τ に対して

$$\int_{\tau(\Omega)} u = 0$$

をみたすならば, Ω は球体である.

定義. N を等長群 G をもつ Riemann 多様体とするとき, N の有界領域 Ω が **Pompeiu 性質** をもつとは, N の連続関数 u が, すべての $\tau \in G$ に対して $\int_{\tau(\Omega)} u = 0$ をみたすならば $u \equiv 0$ であること.

事実. u を図 14 の鉄板の密度を表す関数 (Bessel 関数を用いて得られる: 小林俊行氏 [17] から引用) とする. このときある半径を持つ円板 Ω と全ての運動 τ に対して, u は $\int_{\tau(\Omega)} u = c$, 一定で, Ω の面積が 1 ならば $\int_{\tau(\Omega)} (u - c) = 0$ をみたすが, $u - c \not\equiv 0$.

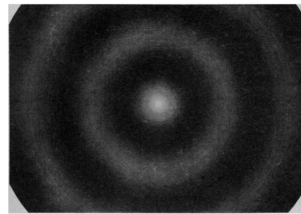


図 14: 鉄板

よって E^2 の円板は Pompeiu 性質を持たない.

注意 14.1 Pompeiu 性質をもたない E^n の領域の既知の例は次の二つだけ (単連結なら球体のみ)

1. E^n の球体.
2. 大きい球体からある半径の球体を除いた領域



図 15: 球体



図 16: 穴の空いた球体

定理 14.2 (気まぐれな定理 Ungar[42]) $B(r)$ を S^2 の半径 r の円板と
するとき, 集合

$$S = \{r \in (0, \pi) \mid B(r) \text{ は Pompeiu 性質をもたない}\}$$

は 加算かつ $(0, \pi)$ で稠密.

よって $B(r)$ は $r \in (0, \pi)$ において確率 1 で Pompeiu 性質をもち, E^2
のときとは大きく異なる.

次に Pompeiu 問題と同値 (1976,[44]) な Schiffer 予想を述べる.

【Schiffer 予想 (N)】 (2023 年現在未解決)

E^n の領域 Ω が連結境界をもつとき, 次の方程式が非自明な解

$$[N] \quad \begin{cases} \Delta u = k^2 u, & k \neq 0 \\ u = c, & \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \partial\Omega \text{ 上} \end{cases} \quad (7)$$

をもてば Ω は球体である. 以下では ν は $\partial\Omega$ の内向き単位法ベクトルと
する.

注意 14.3 ユークリッド球体上, 任意の放射固有関数 (16 節) で, こ
の Dirichlet 版

$$[D] \quad \begin{cases} \Delta u = k^2 u, & k \neq 0 \\ u = 0, & \frac{\partial u}{\partial \nu} = c \quad \partial\Omega \text{ 上} \end{cases} \quad (8)$$

の解を見つけるのはたやすい.

15 再び等径関数

Riemann 多様体 N の領域でも Pompeiu 問題が議論されている. とく
に N がコンパクト, たとえば $N = S^n$ のとき, Savo らは等径関数を用い
て球体以外の Pompeiu 性質を持たない領域を見つけた.

Riemann 多様体 N 上の等径関数 $f \in C^\infty(N)$ とは

$$(a) \quad \Delta f + p(f) = 0, \quad (b) \quad |\nabla f|^2 + q(f) = 0 \quad (9)$$

をみたすものであった.

$N = S^n$ では (a) の $p(f)$ は 1 次式 [28]. 等位面 $f^{-1}(t)$ では, (b) は $\frac{\partial f}{\partial \nu}$
が定数であることと同じである. つまり f は適当な等位面を境界として
分解された S^n の領域 Ω 上の Schiffer 方程式 [N] あるいは [D] の解に関係
している.

次の定理の証明は易しい.

定理 15.1 (Provenzano-Savo [34] 2022) 球面 S^n の領域 Ω は対称ならば, *Pompeiu* 性質をもたない.

証明: Ω の座標関数の一次結合 $\psi = \sum a_i x^i$ は $\psi \neq 0$ だが, 対称で符号が反対だから $\int_{\tau(\Omega)} \psi = 0, \tau \in G (\Omega = \Omega_{\pm})$ をみたく.

定理 15.2 (P-S [34] 2022) f を S^n の $g = 2, 3, 4, 6$ なる等径関数とする. このとき $\Omega_{\pm t} = \{f \geq t\}, t \in (-1, 1)$ は *Pompeiu* 性質をもたない.

定義. $t \in (-1, 1)$ に対して $\Omega_{\pm t}$ を等径チューブとよぶ.

証明は次節以下で与えるが, $g = 2, 4, 6$ のときは Cartan-Münzner 関数は偶関数であるから, 等径チューブ $\Omega_{\pm t}$ が対称となり, 定理 15.1 を適用してもよい.

16 ラプラシアンの特クトルと放射特クトル

以後, 閉 Riemann 多様体 N を考える. N の特クトル ([2]) を

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots \nearrow \infty$$

とする. $\text{Spec}_1(N)$ で相異なる固有値の集合を表す.

定義. Riemann 多様体 N 上に等径関数 f が存在するとき, N は平行 CMC 超曲面族による (特異) フォリエーション (N, \mathcal{F}) をもつ. これを等径フォリエーションという. N がコンパクトの時は $f(N) = [a, b]$ とおくと, $M_+ = f^{-1}(a), M_- = f^{-1}(b)$ は焦部分多様体とよばれるスムーズな部分多様体になる. 特にどちらも余次元 2 以上のときはプロパーとよばれ, $N = S^n$ のときと同じような議論ができる [13] ので, 以後その場合のみを考える.

(N, \mathcal{F}) を焦部分多様体 M_{\pm} をもつ等径フォリエーションとすると, M_+ (または M_-) からの距離 $\rho(x)$ のみによる関数を N 上の放射関数 φ とよぶ. つまり $\rho(N) = [0, D]$ のとき,

$$\varphi(x) = \psi(\rho(x)), \text{ここに } \psi: [0, D] \rightarrow \mathbb{R}.$$

放射関数を固有関数にもつ固有値を放射固有値とよび, $\text{Spec}(N, \mathcal{F})$ を放射固有値の集合として, 放射特クトルとよぶ.

注意 16.1 ρ は任意の等位面 $f^{-1}(c)$ からの距離関数でよい.

定理 16.2 (P-S [34]) (N, \mathcal{F}) を等径フォリエーションとする.

(1) $\text{Spec}(N, \mathcal{F})$ が $\text{Spec}_1(N)$ の真の部分集合のとき, \mathcal{F} の任意の等径チューブは *Pempeiu* 性質を持たない.

(2) $\text{Spec}(N, \mathcal{F}) = \text{Spec}_1(N)$ のとき, ある可算稠密集合 $S(\mathcal{F}) \subset (0, D)$ が存在して, $t \in S(\mathcal{F})$ なる等径チューブ $\Omega_t = \{f > t\}$ は *Pompeiu* 性質を持たない.

(1) の証明は次節で与える.

次はよく知られている.

$$\text{Spec}_1(S^n) = \{k(k+n-1) : k \in \mathbb{N}\}. \quad (10)$$

定理 16.3 (P-S [34]) (S^n, \mathcal{F}) を g 個の主曲率をもつ等径フォリエーションとすると, 放射スペクトルは

$$\text{Spec}(S^n, \mathcal{F}) = \{gk(gk+n-1) : k \in \mathbb{N}\} \quad (11)$$

である.

よって $g > 1$ のとき $\text{Spec}(S^n, \mathcal{F})$ は $\text{Spec}_1(S^n)$ の真の部分集合で, 定理 16.2 (1) が適用できて, 定理 15.2 を得る.

17 放射化

(N, \mathcal{F}) を焦部分多様体 M_{\pm} をもつ等径フォリエーション, ρ を M_+ からの距離関数とする.

定義. N の関数 u の放射化 Au とは $x \in N$ に対して $t = \rho(x)$ とおいて, 等位面 $\rho^{-1}(t)$ で u の値を平均化すること:

$$Au(x) = \frac{1}{|\rho^{-1}(t)|} \int_{\rho^{-1}(t)} u$$

である. ここに $|\rho^{-1}(t)|$ は体積. すると $Au(x)$ は放射関数である.

ここで定理 16.2 の (1) を証明しよう. 任意の $t \in (0, D)$ に対して $\Omega = \Omega_t = \{f > t\}$ とおいて, $\lambda \in \text{Spec}_1(N) \setminus \text{Spec}(N, \mathcal{F})$ の固有関数 ψ が

$$\int_{\tau(\Omega)} \psi = 0$$

をみたすことをいおう. これを否定すると, 余面積公式から

$$\int_0^t \left(\int_{\rho^{-1}(r)} \psi \right) dr = \int_{\tau(\Omega)} \psi \neq 0$$

となり, ある r_0 について $\int_{\rho^{-1}(r_0)} \psi \neq 0$ より ψ の放射化が消えないから, λ が放射固有値となり, $\lambda \in \text{Spec}_1(N) \setminus \text{Spec}(N, \mathcal{F})$ に矛盾する.

次の定理では等径性を本質的に使い, さらなる議論を進めているが結果だけ述べる.

定理 17.1 (P-S, Theorem 2.6 [34]) (N, \mathcal{F}) を等径フォリエーションとするとき,

$$\Delta(\mathcal{A}u) = \mathcal{A}(\Delta u).$$

ここに Δ は N のラプラシアン. 特にラプラシアンは放射関数の空間を保存する.

定理 17.2 (P-S) (N, \mathcal{F}) を等径フォリエーションとするとき, $\text{Spec}(N, \mathcal{F}) \subset \text{Spec}_1(N)$ は無限部分集合 (一致することもある) で, 放射固有値の重複度はどれも 1 である.

注意 17.3 [34] では放射固有関数のみならず ODE も具体的に記しているが, ここでは略す. 他にも第 2 固有値の評価などを得ている.

18 Serrin の方程式

関連して, もう一つ古い問題を述べる. Ω が Riemann 多様体 N の領域で C^1 境界 $\partial\Omega$ をもつとき, 偏微分方程式

$$[\text{Serrin}] \quad \begin{cases} \Delta u = p(u), & u > 0 \quad \Omega \text{ 上} \\ u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \text{定数} & \partial\Omega \text{ 上} \end{cases} \quad (12)$$

を考える. ここに p は 1 変数の C^1 関数.

定理 18.1 (Serrin [38], Molzon [27], Kumaresan-Prajapat [18]) $N = E^n, H^n$, または開半球のとき, (12) が解をもつならば Ω は n 次元球体である.

【Serrin のアイデア】

Serrin は E^n の領域上で, 最大値原理, Alexandrov の反射原理, そして動平面法を用いた. Molzon, Kumaresan-Prajapat はそれを拡張した.

S^n では半球に含まれない領域にはこの議論は使えない. 実際 S^n の等径関数 f は $\Omega = \{f > 0\}$ 上で, [Serrin] をみたすが, $g = 2, 3, 4, 6$ ならば, Ω は球体ではない S^n の半球に含まれない領域である.

以下、本来の Serrin の方程式:

$$\begin{cases} \Delta u = 1, & \Omega \text{ 上} \\ u = 0, & \frac{\partial u}{\partial \nu} = c(\text{定数}) \quad \partial\Omega \text{ 上} \end{cases} \quad (13)$$

について述べる.

定義. この解 $u \in C^2(\Omega)$ が存在する境界付き多様体 Ω を調和領域という.

実際, Stokes より ($\Delta f = -\operatorname{div} \nabla f$, ν は内向き単位法ベクトル)

$$\int_{\Omega} \Delta f = \int_{\partial\Omega} \langle \nabla f, \nu \rangle = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \nu}$$

である. Ω の調和関数 h について $f = uh$ とおいて, $h = \Delta u \cdot h = \Delta(u \cdot h) + 2\nabla u \cdot \nabla h$ を積分すると, u と h の L^2 直交性と (13) の境界条件を使って

$$\int_{\Omega} h = \int_{\Omega} \Delta u \cdot h = \int_{\Omega} (\Delta(u \cdot h) + 2\nabla u \cdot \nabla h) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} h = c \int_{\partial\Omega} h$$

を得る. つまり (定数倍を除き) h の Ω 上の平均値 = $\partial\Omega$ 上の平均値となる.

次の定理は結果のみ述べる.

定理 18.2 (M.M. Fall, I.A. Minlend and T. Weth [11] 2018) S^n の調和領域で, 等径チューブでないものが存在する. これは全測地的超球面 S^{n-1} 上の半径が一定でないチューブ領域で与えられる.

つまり球面の等径関数は, 過剰決定系である (13) の解より真に限定的な関数である. 実際, (9) の (b) だけをみたす transnormal 関数は多様体に強い条件を与え, その位相や大域構造がかなり決定されてしまうので, (b) は (a) 以上に本質的な条件のように思える [43], [23].

19 Constant Flow Property と等径チューブ

このように強い条件である等径性と同値な別の概念を与えよう. 条件 (b) に深く関わるものである. スムースな境界を持つコンパクト Riemann 多様体 (Ω, g) 上の熱方程式の解 $u = u(t, x) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \Delta u + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 & \Omega \text{ 上} \\ u(0, x) = 1 & \forall x \in \Omega \\ u(t, y) = 0 & \forall y \in \partial\Omega, \quad t > 0 \end{cases} \quad (14)$$

を考える.

定義. Ω が **Constant Fow Property (CFP と略す)** をもつとは, すべての $t > 0$ に対して $\frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が一定であることをいう.

定理 19.1 (Savo [37]) Ω が解析的 Riemann 多様体のコンパクト領域のとき,

$$\{\text{CFP をもつ領域}\} = \{\text{等径チューブ}\} \quad (15)$$

証明には $\frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot)$ の t に関する k 階微分が, $\partial\Omega$ 上 k のみによる定数であることを帰納的に示す計算が必要であり, ここには述べきれない.

20 自由境界極小超曲面

次に調和領域の例として自由境界極小超曲面をあげる.

定義. B^n を \mathbb{R}^n の球体とする. 自由境界極小超曲面とは B^n の極小超曲面 Ω で $\partial\Omega \subset \partial B^n$ をみたし, Ω が ∂B^n と直交するものをいう.

定理 20.1 (S.[37]) ユークリッド球体 B^n の自由境界極小超曲面 Ω は調和領域である.

証明: B^n を \mathbb{R}^n の原点中心の単位球体とする. ν を $x \in \partial\Omega$ の Ω における内向き単位法ベクトルとすると, Ω が ∂B^n と直交することから $\nu = -x$ である. r を原点から $y \in \Omega$ への距離とすると, $u(y) = \frac{1}{2(n-1)}(1-r(y)^2)$ が (13) をみたすことをみるのはたやすい [37].

Fraser-Schoen[12] は B^3 において任意の正整数 k 個の境界を持つ極小曲面の存在を示している. スムースなチューブ (定義は下記) は高々 2 つの境界をもつ (P が余次元 1 のとき以外境界は連結) ので次を得る.

系 20.2 B^3 の自由境界極小超曲面で 3 つ以上の境界をもつ Ω は調和領域だが等径チューブではない.

定義. 一般に Riemann 多様体 N の領域 Ω がチューブであるとは, Ω のコンパクト連結部分多様体 P と $R > 0$ が存在して, $\Omega = \{x \in N \mid \rho(x) = \text{dist}(x, P) \leq R\}$ であり, 各 $s \in (0, R]$ に対して $\Sigma_s = \rho^{-1}(s)$ がスムーズな超曲面であることをいう. 特に Σ_s が CMC のとき等径チューブという.

Savo は空間形を含む一般の多様体において次のことを示した.

定理 20.3 (S. [37]) Ω が解析的 *Riemann* 多様体のコンパクト領域のとき,

$$\{\text{CFPをもつ領域}\} = \{\text{等径チューブ}\} \subsetneq \{\text{調和領域}\}. \quad (16)$$

Savo はさらに CFP をもつ領域, したがって等径チューブは Serrin 方程式 (12) および, Schiffer 方程式 (8) の解を持つことを示している.

21 まとめ

以上に述べたように, 等径超曲面自体の研究に加え, それを題材として Floer ホモロジーの計算や, Pompeiu 問題の部分解決などの位相や解析の結果が導かれる. このほかの顕著な結果には次のものがある.

定理 21.1 (Yau 予想の部分解決, Z. Tang and W. Yan [40]) S^n の極小等径超曲面の第一固有値は $n - 1$ である.

また Schoen-Yau-Gromov-Lawson の手術理論をヒントに, 等径超曲面が S^n を二つの円板束に分解することを用いて, スカラー曲率正の計量をもつ非自明な多様体が得られる (Z. Tang, W. Yan and Y. Xie [41]). さらに OT-FKM 型等径超曲面の議論から, 球面の高次ホモトピー類が調和写像で代表されるための条件が示されるなどの最近の発展がある [35].

参考文献

- [1] U. Abresch, *Isoparametric hypersurfaces with four or six principal curvatures*, Math. Ann. 264 (1983) 283–302.
- [2] M. Berger, P. Gauduchon and E. Mazet, *Le Spectre d'une Variété Riemannienne* LNM 194, Springer (1971).
- [3] É. Cartan, *Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante*, Annali di Matematica, 17 (1938) 177–191.
- [4] É. Cartan, *Sur des familles remarquables d'hypersurfaces isoparamétriques dans les espaces sphériques*, Math. Z. 45 (1939) 335–367.
- [5] T. Cecil, Q. S. Chi and G. Jensen, *Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures*, Ann. of Math. 166 (2007) 1–76.

- [6] Q. S. Chi, *Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures, IV*, J. Diff. Geom. 115 (2020) 225–301.
- [7] M. Damian, *Floer homology on the universal cover, Audin’s conjecture and other constraints on Lagrangian submanifolds*, Comment. Math. Helv. 87 (2012) 433–462.
- [8] J. Dorfmeister and E. Neher, *Isoparametric hypersurfaces, case $g = 6, m = 1$* , Comm.Algebra 13 (1985) 2299–2368.
- [9] D. Ferus, H. Karcher and H. F. Münzner, *Cliffordalgebren und neue isoparametrische Hyperflächen*, Math. Z. **177** (1981) 479–502.
- [10] A. Floer, *Morse theory for Lagrangian intersections*, J. Diff. Geom. 28 (1988) 513–547.
- [11] M.M. Fall, I.A. Minlend and T. Weth, *Serrin’s overdetermined problem on the sphere*, Calc. Var. 57 no. 3 (2018).
- [12] A. Fraser and R. Schoen, *Sharp eigenvalue bounds and minimal surfaces in a ball*, Inv. Math. 203 no. 3 (2016) 823–890.
- [13] J. Ge and Z Tang, *Isoparametric functions and exotic spheres*, J. Reine Angew. Math. 683 (2013) 161–180.
- [14] W. Y. Hsiang and H. B. Lawson *Minimal submanifolds of low cohomogeneity*, J. Diff. Geom. 5(1-2) (1971) 1–38.
- [15] H. Irie, H. Ma, R. Miyaoka and Y. Ohnita, *Hamiltonian non-displaceability of Gauss images of isoparametric hypersurfaces*, Bull. London Math. Soc. 48 (5) (2016) 802-812.
- [16] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, *Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, J. Math. Soc. Japan 65 (2013) 1135–1151.
- [17] 小林俊行, シルエットから見る, 数学セミナー 9 (1989) 日本評論社, 82-87. 『現代数学のあゆみ 4』, 日本評論社 (1992) 46-51.
- [18] S. Kumaresan and J. Prajapat, *Serrin’s result for hyperbolic space and sphere*, Duke Math. J. 91 (1) (1998) 17–28.
- [19] H. Ma and Y. Ohnita, *On Lagrangian submanifolds in complex hyperquadrics and isoparametric hypersurfaces in spheres*, Math. Z. 261 (2009) 749–785.

- [20] H. Ma and Y. Ohnita, *Hamiltonian stability of the Gauss images of homogeneous isoparametric hypersurfaces I*, J. Diff. Geom. 97 (2014) 275-348.
- [21] 宮岡礼子, 等径超曲面再訪, 数学 **53** (2001) 18–33.
- [22] 宮岡礼子, 等径超曲面今昔 -É. Cartan と 21 世紀-, 数理解析研究所講究録 **1206** (2001) 32–44.
- [23] R. Miyaoka, *Transnormal functions on a Riemannian manifold*, Diff. Geom. and its Appl. 31 (2013) 130–139.
- [24] R. Miyaoka, *Isoparametric hypersurfaces with $(g, m) = (6, 2)$* , Ann. of Math. 177 (2013) 53-110.
- [25] R. Miyaoka, *Errata of “Isoparametric hypersurfaces with $(g, m) = (6, 2)$ ”*, Ann. of Math. 183 (2016) 1057—1071.
- [26] R. Miyaoka, *Topology of the Gauss image of isoparametric hypersurfaces in S^n* , preprint (2023).
- [27] R. Molzon, *Symmetry and overdetermined boundary problems*, Forum Math. 3 (1991) 143–156.
- [28] H. F. Münzner, *Isoparametrische Hyperflächen in Sphären*, Math. Ann. 251 (1980) 57–71.
- [29] H. F. Münzner, *Isoparametrische Hyperflächen in Sphären II. Über die Zerlegung der Sphäre in Ballbündel*, Math. Ann. 256 (1981) 215–232.
- [30] Y. G. Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic discs III*, The Floer Memorial Volume (eds H. Hofer et al.; Birkhäuser, Basel 1995) 555–573.
- [31] H. Ozeki and M. Takeuchi, *On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres I*, Tohoku Math. J. 27 (1975) 515–559; II 28 (1976) 7–55.
- [32] B. Palmer, *Hamiltonian minimality and Hamiltonian stability of Gauss maps*, Diff. Geom. and its Appl. 7 (1997) 51–58.
- [33] D. Pompeiu, *Sur certains systèmes d'équations linéaires et sur une propriété intégrale des fonctions de plusieurs variables*, C. R. Acad. Sci. Paris 118 (1929) 1138–1139.

- [34] L. Provenzano and A. Savo, *Isoparametric foliations and the Pompeiu property*, Mathematics in Engineering 5(2) (2022) 1–27.
- [35] C. Qian, Z. Tang and W. Yan, *Clifford systems, harmonic maps and metrics with non-negative curvature*, Pacific J. Math, (to appear 2023).
- [36] A. Savo, *Heat flow, heat content and the isoparametric property*, Math. Ann. 366 (2016) 1089–1136.
- [37] A. Savo, *Geometric rigidity of constant heat flow*, Calc. Var. 57 (2018) 156 DOI:10.1007/s00526-018-1434-7
- [38] B. Segre, *Famiglie di ipersuperficie isoparametriche negli spazi euclidei ad un qualunque numero di dimensioni*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. VI. Ser. 27 (1938) 203–207.
- [39] R. Takagi and T. Takahashi, *On the principal curvatures of homogeneous hypersurfaces in a sphere*, In: Differential Geometry in honor of K. Yano, Kinokuniya, Tokyo (1972) 469–481.
- [40] Z. Z. Tang and W. J. Yan, *Isoparametric foliation and Yau conjecture on the first eigenvalue*, J. Diff. Geom. 94(3) (2013) 521-540.
- [41] Z. Tang, W. Yan and Y. Xie, *Schoen-Yau-Gromov-Lawson theory and isoparametric foliations*, Comm. Analy. and Geom. 20 (2012) 989 –1018.
- [42] P. Ungar, *Freak theorem about functions on a sphere*, J. London Math. Soc. 29 (1954) 100–103.
- [43] Q. M. Wang, *Isoparametric functions on Riemannian manifolds, I*, Math. Ann. 277 (1987) 639–646.
- [44] S. A. Williams, *A partial solution of the Pompeiu problem*, Math. Ann. 223 (1976) 183–190.

【第 2 部文献】

- [45] E. Calabi (J.-P. Bourguignon et al. eds), *Collected Works*, Springer (2021).
- [46] E. Calabi, *Isometric imbedding of complex manifolds*, Ann. of Math. 58 (1953) 1–23.

- [47] T. Cecil and P. Ryan, *Tight and Taut immersions of manifolds*, Research Notes in Math. 107. Pitman, Boston MA (1985).
- [48] H. Fujimoto, *On the number of exceptional values of the Gauss map of minimal surfaces*, J. Math. Soc. Japan 40 (1988) 235-247.
- [49] Y. Kawakami, R. Kobayashi and R. Miyaoka, *The Gauss map of pseudo-algebraic minimal surfaces*, Forum Math. 20 (6) (2008) 1055-1069.
- [50] H.B. Lawson, *Complete minimal surfaces in S^3* , Ann. of Math. 92 (1970) 335-374.
- [51] H.B. Lawson, *Some Intrinsic Characterizations of Minimal Surfaces*, J. d'Analyse Math. 24 (1971) 15-161.
- [52] R. Miyaoka, *Some results on minimal surfaces with the Ricci condition*, Minimal Submanifolds and Geodesics (ed. by M. Obata) Kaigai Pub. Ltd. (1978) 121-142.
- [53] R. Miyaoka, *Taut Embeddings and Dupin Hypersurfaces*, LNM 1090 Springer (1984) 15-23.
- [54] R. Miyaoka, *Compact Dupin Hypersurfaces with 3 Principal Curvatures*, Math. Zeit. 187(4) (1984) 433-452.
- [55] R. Miyaoka, *Dupin hypersurfaces and a Lie invariant*, Kodai M. J. 12(2) (1989) 228-256.
- [56] R. Miyaoka, *Lie contact structures and normal Cartan connections*, Kodai M. J. 14(1) (1991) 13-41.
- [57] R. Miyaoka, *The family of isometric superconformal harmonic maps and the affine Toda equations*, J. Reine Angew. Math. 481 (1996) 1-25.
- [58] 宮岡礼子, *E. Calabi に思いを寄せて*, 科学 93(2) 岩波書店 (2023/2) 103-105.
- [59] R. Miyaoka and T. Ozawa, *Construction of taut embeddings and Cecil-Ryan conjecture*, Geometry of Manifolds (ed. by K. Shiohama) Academic Press (1989) 181-189.
- [60] R. Miyaoka and K. Sato, *On complete minimal surfaces whose Gauss map misses two directions*, Arch. Math. 63 (1994) 565-576.

- [61] R. Osserman, *Survey of minimal surfaces*, Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies (1969).
- [62] R. Osserman, *Global Properties of Minimal Surfaces*, Ann. of Math. 80 (1964) 340–364.
- [63] U. Pinkall, *Dupin'sche Hyperflächen*, Doctoral dissertation, Universität Freiburg (1981).
- [64] U. Pinkall, *Curvature properties of taut submanifolds*, Geom. Dedicata 20 (1986) 79-83.
- [65] G. Thorbergsson, *Dupin hypersurfaces*, Bull. London Math. Soc. 15(1983) 493-498.

【著書】

- [66] 宮岡礼子, 現代幾何学への招待, SGC ライブラリ- 124 サイエンス社 (2016).
- [67] 宮岡礼子, 曲がった空間の幾何学, ブルーボックス 講談社 ISBN: 9784065020234 (2017).
- [68] 宮岡礼子, 曲線と曲面の現代幾何学, 岩波書店 ISBN: 9784000052504 (2019).
- [69] 宮岡礼子, 極小曲面, 共立出版 ISBN: 9784320114692 (2022).
- [70] 宮岡礼子, 小谷元子 (編) 21世紀の数学—幾何学の未踏峰, 日本評論社 ISBN:9784535784031 (2003).

第2部

研究を振り返る

2022.12.18

宮岡礼子（東北大学）

原点：極小曲面

M1で購読: R. Osserman: Survey of minimal surfaces

突然ですが

2023年, E. Calabi は 100歳 です (生存!)

2021年出た Calabi 全集について, 「科学」(岩波) に記事を書き,
2023年2月号に掲載.

Calabi の研究で, 自分の研究と関係する部分に少しだけ触れます.

ケーラー多様体の剛性

【Calabi, Ann. of Math. (1953)】

解析的 Kähler 計量をもつ複素多様体の複素空間形への等長埋め込みの存在は diastasis 条件 とよばれる厳格な条件でできる。

*これは J. F. Nash の実 Riemann 多様体の等長埋め込み定理に先立って得られた非常に強い結果である。

特に正則曲線の剛性は、極小曲面論において、B.Lawson による次の結果を導いた。

3

Ricci 条件

【B.Lawson (1971)】

R^3 の極小曲面の計量 ds^2 の特徴である Ricci 条件 ($\sqrt{-K}ds^2$ は平坦, K はガウス曲率) をみたす R^n の極小曲面は、本質的に R^3 , またはその複素化 $R^3 + R^3$ でのみ実現される。

∴) R^n の極小曲面は C^n のある正則曲線 Ψ の実部で表される。曲面が Ricci 条件 をみたすと、 Ψ の微分 ϕ で表される ガウス像 は 複素 2 次超曲面 $Q_{n-2}(\mathbf{C}) \subset P^{n-1}\mathbf{C}$ の 曲率 1 の正則曲線 となる。剛性定理 を用いると、 Ψ は C^6 に入っていることが導かれる。

4

Lawson の問題

【問題】 球面 S^3 の極小曲面の計量は球面 Ricci 条件 ($\sqrt{1-K}ds^2$ は平坦) をみたす。
 S^n の極小曲面の計量が球面 Ricci 条件をみたすとき、
 これは S^3 の極小曲面の直和に分解するか？

Calabiは当時 S^n の極小曲面の jet を用い、高階微分列を構成して極小曲面を解析する手法を開発 \Rightarrow 調和列やTwistor 理論に発展。

Lawson は S^n の極小曲面の解析にこれを使い、私もそれをヒントに次の部分解決を得た。

5

【M. (1978)】

平坦トーラスと異なる S^n の極小曲面 M の計量が球面 Ricci 条件をみたすとき、

- (1) $n < 6$ ならば M は S^3 に入っている。
- (2) コンパクト, 種数 > 1 で, $n < 10$ ならば, M は S^3 の極小曲面の直和になる。

これを1977年の S.S.Chern と大槻富之助 教授による日米セミナーで、Lawson 他多くの幾何学者 (Yau, Uhlenbeck, Berger, Nitché...) の前で発表し、Klingenberg に Bonn 大学によんでもらうことになった。

注意. 球面の極小曲面は正則曲線論にはのらない。

6

戸田方程式との関係

後に可積分系を学んでいるうちに、これが 2次元 Affine 戸田方程式の周期解 に本質的に関わることが判り、次の結果を得た。

【M., Crelle (1996)】

奇数次元の球面 S^n の超共形的とよばれる極小曲面の計量は 2次元 Affine 戸田方程式の周期解 からなり、その最小周期に対応するある球面 S^k の極小曲面の直和に分解する。
特に Lawson の問題は $k=3$ の場合 に相当する。

7

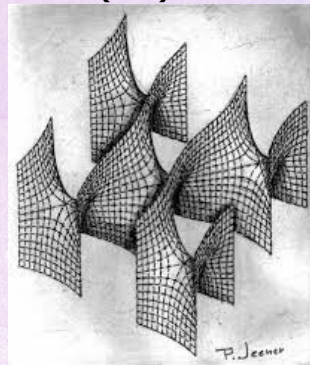
極小曲面のガウス写像の除外値問題

事実 R^3 の曲面が極小

↔ ガウス写像がリーマン球面への(反)正則写像.

【藤本坦孝 (1988)】

R^3 の完備極小曲面のガウス写像は高々 4 点を除外する (シャープ).



8

【Osserman (1964)】

代数的極小曲面のガウス写像の除外値は高々 3 点.

代数的極小曲面

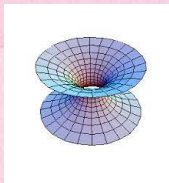


穴あきリーマン面上で定義される完備極小曲面で,
Weierstrass データが閉リーマン面まで拡張される.

未解決問題

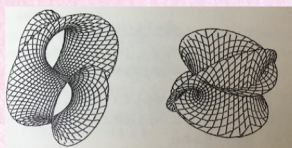
* 3 点除外の例は発見されていない.

ガウス写像が 2 点を除外する例

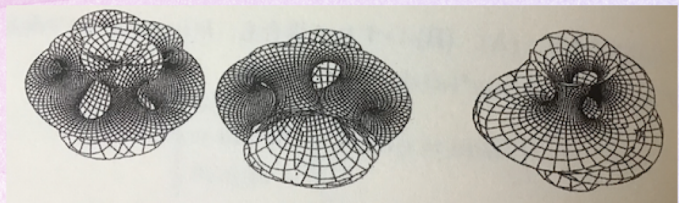


懸垂面

【M.-佐藤勝憲, Archiv der Math.(1994)】
ほとんど全ての位相型でガウス写像が
2 点を除外する代数的極小曲面が
存在する.



除外方向が変化する例



トーラスから 4 点を除いた例

現状

M が双曲型, つまり 普遍被覆面が円板 D の時が本質的.

ガウス写像をリフトして, $g: D \rightarrow S^2$ とするとき,
 M の基本領域 F の面積は, Fubini-Study 計量の
 引き戻しで計った $A_{FS}(F)$ と, D の ポアンカレ計量で
 計った $A_{hyp}(F)$ のふた通りで測れる. これらの比

$$R = \frac{A_{FS}(F)}{A_{hyp}(F)}$$

が重要な役割を果たす.

11

【川上裕-小林亮一-M., Forum Math.(2008)】

比 R を用いて Osseman の定理よりも精密な結果を得た (完全分岐値数の評価) .

挑戦中 普遍被覆面 D 上の Nevanlinna 理論の構築
 D 上に Fuchs 群作用がある場合に小林氏と研究中

12

Dupin 超曲面と Lie 接触構造

ここからは前半の等径超曲面につながる研究について述べる.

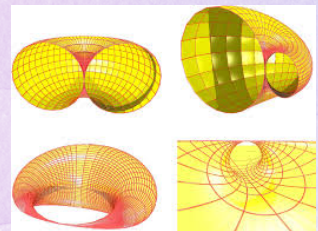
(*) 空間型の超曲面 M の主曲率がその分布に沿って一定
のとき, 主曲率分布のリーフ=曲率曲面 は球面となる.
ここに主曲率とは型作用素の固有値.

主曲率の重複度が一定で, かつ(*) をみたす
超曲面を Dupin 超曲面という.
特に等径超曲面はDupin超曲面.

13

Dupin 超曲面は数種の球面でフォリエートされた超曲面

- (1) これは共形変換で不変な性質である.
- (2) さらに膨張変換で不変な性質である.



膨張変換とは法方向に一定距離ずらす変換.

共形変換と膨張変換を合成して得られる変換をLie の接触変換という.

Lie の接触変換で不変な性質を扱う幾何を Lie の球幾何,
あるいは Lie の接触幾何という.

Tautness

球面の部分多様体上, 任意の点からの球面距離関数が Morse の不等式の等号を与えるとき, taut 埋め込みという.

(外のユークリッド空間の高さ関数が Morse の不等式の等号を与える tight 埋め込みと同値) .

Tautness は Lie の接触変換で不変な性質である.

【Thorbergsson (1983)】

球面 S^n に埋め込まれたコンパクト Dupin 超曲面 M は S^n の等径超曲面と同じホモロジーをもつ.
よって主曲率の個数や重複度も一致する.

また M は taut である.

【M. (1984), Pinkall (1986)】

球面に埋め込まれたコンパクト超曲面は, taut ならば Dupinである.

$M: S^n$ に埋め込まれたコンパクト Dupin 超曲面

g = 相異なる主曲率の個数 $\in \{1, 2, 3, 4, 6\}$

事実 $g=1, 2$ では M は等径超曲面と Lie 接触変換で移り合う.

【M., Math.Z. (1984)】 $g=3$ でもこれかなりたつ.

【Cecil-Ryan 予想 (1985)】

S^n に埋め込まれたコンパクト Dupin 超曲面は、
等径超曲面と Lie 接触変換で移り合う.

17

Lie 曲率の発見と Cecil-Ryan 予想の否定的解決

【M. (1989)】

S^n の超曲面の主曲率の個数が 4 以上の時、任意の 4
つの主曲率の複比は Lie の接触変換で不変である。
これを Lie 曲率 という。

【小沢哲也-M. (1989)】

$g=4, 6$ の Cecil-Ryan 予想には 反例がある。

18

この業績で2001年の幾何学賞をいただきました。

- Lie の球幾何の情報を初めてくれたのは TU.Berlin の U. Pinkall です(1981).
- 現在, 曲面論でも U. Jeromin や, W. Rossmann により Lie の球幾何を用いた研究がなされています.

19

Lie 接触構造と佐藤肇氏の問題の解決

n 次元多様体の等長変換群 : $O(n)$ \Rightarrow リーマン幾何, リーマン接続

n 次元多様体の共形変換群 : $O(n,1)$ \Rightarrow 共形幾何, 共形接続

n 次元多様体の Lie 接触変換群 : $O(n,2)$ \Rightarrow Lie 接触幾何, 田中接続

注意 : Lie 接触幾何は多様体の接空間上の幾何構造

共形接続は第 1 種階別 Lie 環に付随する接続

田中接続は第 2 種階別 Lie 環に付随する接続

佐藤肇氏の問題

事実 共形平坦な多様体は Lie 平坦である.
(平坦 \iff 曲率が全て消える)

問題 逆はなりたつか？

【M. (1991)】

Lie 平坦な多様体は共形平坦である.

∴) 田中接続の曲率をすべて計算した.

21

まとめ

このあと、徐々に等径超曲面の研究に興味をもち、色々な問題と絡んでいて面白いことに気づきました。

非等質なものが無限にあることは、尾関-竹内の革命的発見です。

Floer homology の具体的計算はトーリックなどを除きあまりありません。

また、等径関数は過剰決定系の解の具体例を色々与え、楕円型偏微分方程式、さらには熱方程式との関係から、放物型の観点からも、坂口茂氏らの結果などあり、とても興味深いです。

文献は前半にまとめて載せてあります。

22

1977年9月 日米セミナー



1977年9月の日米セミナーにて、主な方の名前を挙げると：最前
上から左へ、土井寛生、I. Simons、2列目右より、佐

Minimal Submanifolds and Geodesics (ed. by M. Obata), Kaigai Pub. Ltd. (1978) 掲載写真

S.T.Yau (before after)



S. T. Yau と (1977 年 9 月).



2018年6月 東北大学

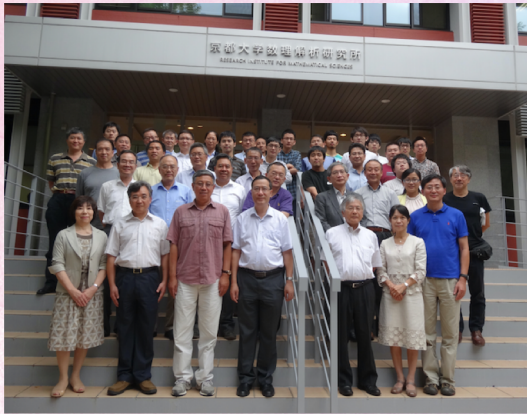
17年継続している日中幾何学研究集会

Japan-China Geometry Conference

(日中幾何学研究集会)

From September 6 to September 12 held in Kyoto and Nara

2015年9月 RIMSと
奈良女子大で開催



G. Tian

著書



曲がった空間の幾何学 現代... 2017年



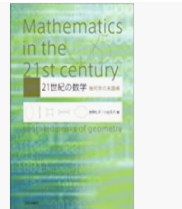
極小曲面 2022年



曲線と曲面の現代幾何学: 入... 2019年



現代幾何学への招待 2016年 04 月号 [雑誌] (数理科学 別冊)
宮岡礼子 | 2016/4/22
★★★★☆ ~ 5.0 (2)
雑誌
この本は現在お取り扱いできません。



21世紀の数学—幾何学の未踏峰
宮岡礼子、小谷元子 | 2004/7/1
★★★★☆ ~ 4.2 (3)
単行本



電子
SDB Digital Books 57
現代幾何学への招待【電子版】
曲面の幾何からシンプレクティック幾何、フレアホモロジーまで
宮岡礼子(東北大学名誉教授) 著
定価: 2,241 円 (本体: 2,037円+税)
発行日: 2019年3月10日
発行: サイエンス社
ISBN: 978-4-7819-9966-1
サイズ: 電子書籍
ページ数: 142 ページ
難易度: 初級 中級 上級

曲がった空間の幾何学(BB)は広く読まれているようで、4版まで増刷されています。
右上の2冊は手に入りにくいようですが、数理科学には電子版があります。