

完全例外列の数と LYASHKO–LOOIJENGA 写像の次数

高橋 篤史

ABSTRACT. 単純特異点に対して, Deligne は「distinguished basis の数」に対する漸化式を与え, Looijenga による予想, つまりこの数と Lyashko–Looijenga 写像と呼ばれる分岐集合の位相幾何学的情報を捉える写像の次数の一致, を示した. この背景にあるミラー対称性に触れつつ, アフィンカスプ「特異点」および単純楕円型特異点への一般化を解説する.

1. 導入

μ を正の整数とし, $\mu + 1$ 次対称群 $S_{\mu+1}$ を考える. 巡回置換 $(1 \cdots \mu + 1)$ の互換による分解の総数を $\tilde{h}_{0;\mu+1}$ であらわす:

$$\tilde{h}_{0;\mu+1} := |\{(r_1, \dots, r_\mu) \in S_{\mu+1}^\mu \mid r_1 \cdots r_\mu = (1 \cdots \mu + 1), r_i \text{ は互換}\}|.$$

$\mu = 1$ ならば $(1\ 2) = (1\ 2)$ が唯一の分解であり $\tilde{h}_{0;2} = 1$ となり, $\mu = 2$ ならば

$$(1\ 2\ 3) = (1\ 2)(2\ 3) = (2\ 3)(1\ 3) = (1\ 3)(1\ 2)$$

がすべての可能な分解であることがわかるので, $\tilde{h}_{0;3} = 3$ となる. 一般的には,

$$\tilde{h}_{0;\mu+1} = \frac{\mu!}{\frac{2}{\mu+1} \cdots \frac{\mu+1}{\mu+1}} = (\mu + 1)^{\mu-1} \quad (1.1)$$

が成立することが知られている. 例えば, 比較的初等的に, ラベル付き tree グラフに関する Cayley の公式を用いて証明できる (Déne の定理 [6]).

一方で, $\tilde{h}_{0;\mu+1}$ は Riemann 球面上の有限分岐被覆の数え上げである Hurwitz 数 $h_{0;\mu+1}$ との間に $\tilde{h}_{0;\mu+1} = (\mu + 1)h_{0;\mu+1}$ という関係があり, その結果として漸化式 (cut-and-join 方程式)

$$\tilde{h}_{0;\mu+1} = \frac{\mu + 1}{2} \sum_{i=1}^{\mu} \frac{(\mu - 1)!}{(i - 1)!} (\mu - i)! \tilde{h}_{0;i} \tilde{h}_{0;\mu+1-i}, \quad \tilde{h}_{0;1} := 1, \quad (1.2)$$

をみたく (Hurwitz [9]). さらに, $\mu + 1$ 次対称群 S_μ を A_μ 型の Weyl 群, 巡回置換 $(1 \cdots \mu + 1)$ を Coxeter 元, 互換を鏡映, とそれぞれ自然に一般化することにより, 類似の漸化式が有限ルート系に対して成立することが Deligne [7] によって示された. また, Obaid–Nauman–Shammakh–Fakieh–Ringel [17] によって, Dynkin 籠の有限次元表現のなす導来圏 (有限ルート系のある圏化) における完全例外列の数およびそれがみたく漸化式としての解釈がもたらされた.

本稿の目的は, アフィン ADE 型および楕円 DE 型ルート系の圏化となっている, ある種のオービフォールド射影直線上の接続層のなす導来圏に対する, 「完全例外列の数」およびそれらがみたく漸化式について解説することである. ここで「完全例外列の数」としたのは, 素朴な定義に基づくとはそれは自明に無限になってしまうからであり, 実際には圏の自己同値群の無限部分群による同値類を数え上げることになる

からである。そして Looijenga による予想の Deligne による解決の自然な拡張、アフィンカusp多項式および単純楕円型特異点の大域的な普遍開折に対して定まる Lyashko–Looijenga 写像の次数と「完全例外列の数」が一致すること、についても紹介する。

2. ルート系

まず、齋藤恭司によって導入された（一般）ルート系の概念について述べる。これは後で簡単に振れるように、幾何学的な動機に基づき考案された、通常の良く知られたルート系概念の自然な一般化である ([19] 参照)。

定義 2.1. μ を正の整数とする。階数 μ のルート系 \mathcal{R} とは、

- 階数 μ の自由 \mathbb{Z} -加群 \mathcal{N} ,
- 交叉形式と呼ばれる, 対称 \mathbb{Z} -双線型形式 $I: \mathcal{N} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{Z}$,
- 実ルートの集合と呼ばれる, \mathcal{N} の部分集合 Δ_{re} ,

からなる組 $(\mathcal{N}, I, \Delta_{re})$ であって, 以下の性質をみたすものことである: satisfying the following properties:

- (i) $\mathcal{N} = \mathbb{Z}\Delta_{re}$.
- (ii) 各 $\alpha \in \Delta_{re}$ に対して, $I(\alpha, \alpha) = 2$.
- (iii) 各 $\alpha \in \Delta_{re}$ に対して, 鏡映 $r_\alpha \in \text{Aut}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{N}, I)$ を $r_\alpha(\lambda) := \lambda - I(\alpha, \lambda)\alpha$ で定義する. このとき, $r_\alpha(\Delta_{re}) = \Delta_{re}$ が成立する.

定義 2.2. 群 $W(\mathcal{R}) := \langle r_\alpha \mid \alpha \in \Delta_{re} \rangle$ をルート系 \mathcal{R} の Weyl 群という.

注意 2.3. 簡単のため, 「simply-laced」なルート系のみを考える. つまり, B, C, F, G 型のようなものはここでは扱わない.

注意 2.4. 非常に重要なのは, 交叉形式 I が正定値であるとは仮定しないことである.

注意 2.5. Weyl 群 $W(\mathcal{R})$ は Coxeter 群であるとは限らない. にもかかわらず, 幾何学的背景に基づき, また, 群の特別な生成元と関係式による表示に寄らず, Coxeter 元 の概念を定めたい. これは後で導入する「ルート基底」の概念に基づきなされる.

定義 2.6. ルート系 \mathcal{R} の符号数を, 交叉形式 I の符号数 (μ_+, μ_0, μ_-) により定める. ただし, μ_+ (μ_0, μ_-) はそれぞれ I の正 (零, 負) の固有値の数である.

とくに

$$\text{rad}(I) := \{\lambda \in \mathcal{N} \mid I(\lambda, \lambda') = 0, \lambda' \in \mathcal{N}\}.$$

とするとき, $\mu_0 = \text{rank}_{\mathbb{Z}}(\text{rad}(I))$ である.

命題 2.7. $\mathcal{R} = (\mathcal{N}, I, \Delta_{re})$ を階数 μ のルート系とするとき, 以下は同値である:

- (i) $(\mu_+, \mu_0, \mu_-) = (\mu, 0, 0)$. つまり, I は $\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 上に内積を定める.
- (ii) Δ_{re} は有限集合である.
- (iii) $W(\mathcal{R})$ は有限群である.

これらの条件をみたすルート系 \mathcal{R} を有限ルート系という.

注意 2.8. 有限ルート系の次に位置づけられるもので、幾何学的背景を持ち、とくに興味深く理解しやすいと思われるクラスのルート系は、

- アフィンルート系: 符号数は $(\mu_+, \mu_0, \mu_-) = (\mu - 1, 1, 0)$,
- 楕円ルート系: 符号数は $(\mu_+, \mu_0, \mu_-) = (\mu - 2, 2, 0)$,
- カスプルート系: 符号数は $(\mu_+, \mu_0, \mu_-) = (\mu - 2, 1, 1)$,
- Hurwitz 空間に付随するルート系: 符号数は $(\mu_+, \mu_0, \mu_-) = (\mu_+, \mu_0, 0)$,

などである.

一般ルート系において最も重要な概念は、以下に述べるルート基底および Coxeter 元である.

定義 2.9. $\mathcal{R} = (\mathcal{N}, I, \Delta_{re})$ を階数 μ のルート系とする. Δ_{re} の部分集合 $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\mu\}$ が,

$$\Delta_{re} = W_B \cdot B, \quad W_B := \langle r_{\alpha_1}, \dots, r_{\alpha_\mu} \rangle \subset W(\mathcal{R}),$$

をみたすとき、 B は**ルート基底**であるという.

また、 $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\mu\}$ をルート基底とすると、 $\{\bullet_1, \dots, \bullet_\mu\}$ を頂点集合とし、2 頂点 \bullet_i, \bullet_j を $I(\alpha_i, \alpha_j) < 0$ ならば $-I(\alpha_i, \alpha_j)$ 本の実線で、 $I(\alpha_i, \alpha_j) > 0$ ならば $I(\alpha_i, \alpha_j)$ 本の破線で、結んで得られるグラフを、 \mathcal{R} の B に関する **Coxeter-Dynkin 図形**という.

注意 2.10. B がルート系ならば、 $\mathcal{N} = \mathbb{Z}B$ および $W(\mathcal{R}) = W_B$ であることが従う. 一方で、 $\mathcal{N} = \mathbb{Z}B$ ならば B がルート基底であるということは、一般に成立しない.

注意 2.11. 有限ルート系はルート基底を持つ. 実際、すべての i, j について $I(\alpha_i, \alpha_j) \leq 0$ となるようなルートの集合を取ることができ、その集合がルート基底をなすことを示すことができる (これを単純ルート基底という). また、単純ルート基底に関する Coxeter-Dynkin 図形は単純ルート基底の選び方に寄らないことも知られている (それがいわゆる通常の Dynkin 図形である).

注意 2.12. 任意のルート系がルート基底を持つかどうかは不明である.

定義 2.13. $\mathcal{R} = (\mathcal{N}, I, \Delta_{re})$ を階数 μ のルート系とする. ルート基底 $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\mu\}$ を用いて $c = r_{\alpha_1} \dots r_{\alpha_\mu}$ とあらわされる元 $c \in W(\mathcal{R})$ を \mathcal{R} の **Coxeter 元**という,

定義 2.14 (齋藤恭司 [19]). ルート系 \mathcal{R} と \mathcal{R} の Coxeter 元 c の組 (\mathcal{R}, c) を**一般ルート系**という.

ルート系 $\mathcal{R} = (\mathcal{N}, I, \Delta_{re})$ の既約性、同型、などといったものは自然に定義される. また、既約な有限ルート系は、単純ルート基底に関する Coxeter-Dynkin 図形を用いて、 A_μ 型 ($\mu \geq 1$), D_μ 型 ($\mu \geq 4$), E_μ 型 ($\mu = 6, 7, 8$), に分類されるということは有名であるので (Bourbaki [4] 等を参照)、ここでは説明を省略する.

ただし、一般ルート系 (\mathcal{R}, c) の分類は \mathcal{R} が有限ルート系の場合でもより詳細なものになる. つまり、ルート系 \mathcal{R} の Coxeter 元 c_1, c_2 で、 (\mathcal{R}, c_1) と (\mathcal{R}, c_2) が一般ルート系として非同型となるものが存在する. 最近の研究によると、「非標準的な」Coxeter 元も「通常の」Coxeter 元と同じ自然な幾何学的構成を持つ場合があり、その重要性が明らかになりつつある.

3. 一般ルート系の幾何学的構成

ADE 型特異点を定める 3 変数多項式 f を以下のように与える：

$$x_1^{\mu+1} + x_2^2 + x_3^2 \text{ (} A_\mu\text{-型, } \mu \geq 1), \quad x_1^{\mu-1} + x_1x_2^2 + x_3^2 \text{ (} D_\mu\text{-型, } \mu \geq 4), \quad x_1^4 + x_2^3 + x_3^2 \text{ (} E_6\text{-型)}$$

$$x_1^3 + x_1x_2^3 + x_3^2 \text{ (} E_7\text{-型),} \quad x_1^5 + x_2^3 + x_3^2 \text{ (} E_8\text{-型)}.$$

ここで大事なことは、 f は重み付き斉次多項式であり、とくに \mathbb{C}^3 の原点にのみ孤立臨界点を持つ正則関数を定めることである。

注意 3.1. ミラー対称性を考察する際には、可逆多項式と呼ばれる整数係数の可逆な正方行列を用いて定まる多項式を基に、多項式の持つ対称性を含めて精密に与えておく必要がある。

これらの f を用いて、幾何学的に一般ルート系を導出する方法の概略を述べる。簡単のために f を ADE 型特異点を定める多項式で話を展開するが、とくに後述するアフィンカusp 多項式や単純楕円型特異点を定める多項式についても（ルートの集合の決め方や普遍開折の定め方を除き）本質的に同様の構成が可能である。

Jacobi 環 $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]/(\partial f)$ の次元を μ_f であらわし、 f の **Milnor 数** と呼ぶ。また、 R を十分大きな正の実数とすると、 $f^{-1}(R)$ を f の **Milnor ファイバー** と呼ぶ。Milnor の定理により、Milnor ファイバーの 2 次整係数ホモロジー群 $H_2(f^{-1}(R); \mathbb{Z})$ は階数 μ_f の自由アーベル群となる。また、Milnor ファイバーは実 4 次元の可微分多様体であるので、 $H_2(f^{-1}(R); \mathbb{Z})$ 上に交叉形式と呼ばれる対称双線型形式が定まる。

命題 3.2 (cf. [19]). f を上述の ADE 型特異点を定める 3 変数多項式とする。

- 自由アーベル群 \mathcal{N}_f を、 $\mathcal{N}_f := H_2(f^{-1}(R); \mathbb{Z})$ で定める、
- 対称双線型形式 $I_f : \mathcal{N}_f \times \mathcal{N}_f \rightarrow \mathbb{Z}$ を、 $H_2(f^{-1}(R); \mathbb{Z})$ 上の交叉形式の -1 倍として定める。
- ルートの集合 Δ_f を、 $\Delta_f = \{\alpha \in \mathcal{N}_f \mid I_f(\alpha, \alpha) = 2\}$ で定める。

このとき、 $\mathcal{R}_f := (\mathcal{N}_f, I_f, \Delta_f)$ は f に対応する型の有限ルート系となる。

また、モノドロミー表現 $\rho : \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, R) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{N}_f, I_f)$ による基本群の生成元 1 の像 $\rho(1)$ により、 c_f を $\rho(1)^{-1}$ で定めるとき、 c_f はルート系 \mathcal{R}_f の Coxeter 元を定める。とくに、 c_f はある単純ルート基底 $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{\mu_f}\}$ に関する鏡映の積 $r_{\alpha_1} \dots r_{\alpha_{\mu_f}}$ に共役である。

注意 3.3. 実 4 次元の可微分多様体の 2 次ホモロジー群での交叉数を考えるので、球面のホモロジー類の自己交叉数が 2 となるように、交叉形式の符号を変更している。

結果がわかっているので先に Coxeter 元も含めて主張を書いたものの、ここまでの準備ではルート基底が何か説明できない（結果論的にはこれも可能ではあるのだが）。ルート基底はより精密な情報である、消滅サイクルの格別基底という概念によって記述されることになる。

このことを説明するために、 f の **普遍開折** と呼ばれる底空間 $M := \mathbb{C}^{\mu_f}$ 上の多項式の族

$$F := f + \sum_{i=1}^{\mu_f} s_i \phi_i(x_1, x_2, x_3),$$

を導入することから始める。ここで、単項式 $\phi_i(x_1, x_2, x_3)$ を以下の条件をみたすように選ぶ：

- $\phi_1 := 1$.
- $\{\phi_1, \dots, \phi_{\mu_f}\}$ は, Jacobi 環 $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]/(\partial f)$ の複素ベクトル空間としての基底である.

注意 3.4. 実は, 可逆多項式 (f も実際そうである) に対して標準的に ϕ_i を選ぶ方法がある.

注意 3.5. ADE 型特異点を定める 3 変数多項式 f に対して, 変数 x_1, x_2, x_3 の次数を f の次数が 1 となるように定めたとき, ϕ_i ($1 \leq i \leq \mu_f$) の次数 $\deg \phi_i$ が $0 \leq \deg \phi_i < 1$ となるように取れる.

例 3.6. $f = x_1^{\mu+1} + x_2^2 + x_3^2$ の普遍開折は, $F = x_1^{\mu+1} + x_1x_2^2 + x_3^2 + \sum_{i=1}^{\mu} s_i x_1^{i-1}$ と取れる.

例 3.7. $f = x_1^3 + x_1x_2^2 + x_3^2$ の普遍開折は, $F = x_1^3 + x_1x_2^2 + x_3^2 + s_1 + s_2x_1 + s_3x_2 + s_4x_1x_2$ と取れる.

F を f の普遍開折とすると, 相対的な臨界点の集合 $\mathcal{C} := \{\partial F = 0\} \subset \mathbb{C}^3 \times M$ から M への射影は次数 μ_f の分岐被覆となっている. M の部分集合 \mathcal{B} を

$$\mathcal{B} := \{\mathbf{s} \in M \mid F|_{\mathbb{C}^3 \times \{\mathbf{s}\}} : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C} \text{ の臨界値は } \mu_f - 1 \text{ 個以下}\}$$

で定める. つまり, $\mathbf{s} \in M \setminus \mathcal{B}$ において, $F|_{\mathbb{C}^3 \times \{\mathbf{s}\}}$ の臨界値はちょうど μ_f 個であって, \mathbb{C} 上 μ_f 個の点からなる配置空間 $\text{Conf}(\mathbb{C}, \mu_f)$ の点を与えることがわかる.

定義 3.8. $M \setminus \mathcal{B}$ の点 \mathbf{s} に対して F の $\mathbb{C}^3 \times \{\mathbf{s}\}$ への制限 $F|_{\mathbb{C}^3 \times \{\mathbf{s}\}}$ の μ_f 個の臨界値の集合を与える写像は, 正則写像 $M \setminus \mathcal{B} \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{C}, \mu_f)$ を定める. これを **Lyashko–Looijenga 写像** といい, LL であらわす.

定理 3.9 (Looijenga [14]). 写像 $\text{LL} : M \setminus \mathcal{B} \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{C}, \mu_f)$ は不分岐正則被覆写像であり, その次数は

$$\deg \text{LL} = \frac{\mu_f!}{\prod_{i=1}^{\mu_f} \deg s_i}$$

で与えられる. ここで, $\deg s_i$ は f および F が 1 次になるように定められる, 変数 s_i の次数である.

例 3.10. $f = x_1^{\mu+1} + x_2^2 + x_3^2$ の普遍開折 $F = x_1^{\mu+1} + x_1x_2^2 + x_3^2 + \sum_{i=1}^{\mu} s_i x_1^{i-1}$ を考える. このとき, $\mu_f = \mu$ および $\deg s_i = (\mu + 2 - i)/(\mu + 1)$ であり.

$$\frac{\mu_f!}{\prod_{i=1}^{\mu_f} \deg s_i} = \frac{\mu!}{\frac{\mu+1}{\mu+1} \cdots \frac{2}{\mu+1}} = (\mu + 1)^{\mu-1}$$

となる. LL 写像の次数は $\mu = 2$ のときは容易に計算することができる ($\mu = 1$ のときはほぼ自明に 1 がわかる). 実際, 2 個の臨界値は $\{s_1 \pm c \cdot s_2^{3/2}\}$, $c = \sqrt{-4/27}$ となるので, $\deg \text{LL} = 3$ がわかる.

$\text{Conf}(\mathbb{C}, \mu_f)$ の点は,

$$u_i \prec u_j \iff \begin{cases} \text{Im}(u_i) > \text{Im}(u_j) \\ \text{Im}(u_i) = \text{Im}(u_j) \text{ かつ } \text{Re}(u_i) < \text{Re}(u_j) \end{cases}.$$

による順序によって, \mathbb{C}^{μ_f} の点 (u_1, \dots, u_{μ_f}) を用いて一意的にあらわすことができる. 点 $\mathbf{s} \in M \setminus \mathcal{B}$ を固定し, LL による像を $(u_1, \dots, u_{\mu_f}) \in \text{Conf}(\mathbb{C}, \mu_f)$ とする. 各 $i = 1, \dots, \mu_f$ に対して, \mathbb{C} において u_i から R を結ぶ道 p_i を, 互いに交わらず, 点 u_1, \dots, u_{μ_f} から近く点 R から離れたところでは道の偏角が十分小さな非負実数であるように選ぶ. 各経路 p_i に対して 2 次元球面で表現されるホモロジー類 $\alpha'_i \in H_2(F^{-1}(R); \mathbb{Z})$ が定まることが知られており, これを道 p_i に沿った**消滅サイクル**という.

例 3.11. 簡単のため A_1 型の普遍開折で $s_1 = 0$ を $M \setminus \mathcal{B}$ の点として選ぶとする (実はこのとき $\mathcal{B} = \emptyset$). $F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ の臨界値は 0 なので, 0 から R を結ぶ道 $p: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ を $p(t) := Rt$ と選ぶ. $t \in (0, 1]$ のとき, ファイバー $F^{-1}(Rt)$ には $F^{-1}(Rt) \cap \mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = Rt\}$ で定まる 2 次元球面が入っているが, $t \rightarrow 0$ の極限においてこの球面が原点に「消滅する」. この球面に向き付けを選んで得られる 2 次ホモロジー類が, 道 p に沿った消滅サイクルである. なお, F が一般の場合には, 正則函数版の Morse の補題を用いてこの例に帰着する.

定義 3.12. 各 $i = 1, \dots, \mu_f$ に対して, $\alpha_i \in H_2(f^{-1}(R); \mathbb{Z})$ を, 上のように選んだ道 p_i に沿った消滅サイクル $\alpha'_i \in H_2(F^{-1}(R); \mathbb{Z})$ の同型写像 $H_2(F^{-1}(R); \mathbb{Z}) \cong H_2(f^{-1}(R); \mathbb{Z})$ による像として定める. このとき, 順序集合 $(\alpha_1, \dots, \alpha_{\mu_f})$ を, **消滅サイクルの格別基底**と呼ぶ. また, 消滅サイクルの格別基底全体のなす集合を B_f であらわす.

注意 3.13. 消滅サイクル α は 2 次元球面のホモロジー類なので, $I_f(\alpha, \alpha) = 2$ となる.

配置空間 $\text{Conf}(\mathbb{C}, \mu_f)$ の基本群は braid 群 Br_{μ_f} であり, 生成元 $\{b_i \mid i = 1, \dots, \mu_f - 1\}$ と関係式 $b_i b_j = b_j b_i$ ($|i - j| \geq 2$), $b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1}$ ($i = 1, \dots, \mu_f - 2$) による記述を持つ. 群準同型 $\text{Br}_{\mu_f} \rightarrow S_{\mu_f}$, $b_i \mapsto (i, i + 1)$ および $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mu_f}$ 上の自然な S_{μ_f} -作用を定める群準同型 $S_{\mu_f} \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mu_f}$ の合成を考えることにより, braid 群 Br_{μ_f} とアーベル群 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mu_f}$ の半直積 $\text{Br}_{\mu_f} \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mu_f}$ が定まる. この群 $\text{Br}_{\mu_f} \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mu_f}$ は, Picard–Lefschetz 理論によって, 以下のように消滅サイクルの格別基底全体のなす集合 B_f に作用することが知られている:

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_{\mu_f}) \cdot b_i := (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, r_{\alpha_i} \alpha_{i+1}, \alpha_i, \alpha_{i+2}, \dots, \alpha_{\mu_f}).$$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_{\mu_f}) \cdot \bar{e}_i := (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, -\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{\mu_f}).$$

ここで \bar{e}_i は $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mu_f}$ の i 番目の生成元とする. 大事な性質は作用の推移性である:

命題 3.14. 群 $\text{Br}_{\mu_f} \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mu_f}$ は消滅サイクルの格別基底全体のなす集合 B_f に推移的に作用する.

点 $s \in M \setminus \mathcal{B}$ と 2 次元球面の向き付けを変えると, 一般には異なる消滅サイクルの格別基底が得られるが, 向き付けの自由度は集合 B_f への $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mu_f}$ -作用による商集合 $B_f/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mu_f}$ を考えることで消すことができる. したがって, 点 $s \in M \setminus \mathcal{B}$ と消滅サイクルの格別基底の関係性が問題になるが, この命題により商集合 $B_f/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mu_f}$ に braid 群 Br_{μ_f} が推移的に作用することから, $M \setminus \mathcal{B}$ から $B_f/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mu_f}$ への写像が全写像になることがわかる. Looijenga の予想「 $\deg \text{LL} = |B_f/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mu_f}|$ 」は, 適切に定められた開集合 $U \in M \setminus \mathcal{B}$ と向き付けを忘れた消滅サイクルの格別基底の間に 1 対 1 対応を期待するものである (Bessis [2], Hertling–Roucairol [11] も参照されたい).

Looijenga の予想における右辺の計算の前に, ひとまずルート系の話に戻ろう. というのもルート系 \mathcal{R}_f のルート基底についてまだ説明していなかった. 点 $s \in M \setminus \mathcal{B}$ を固定し, 上述のように道 p_1, \dots, p_{μ_f} などを選んでおく. 今度は点 R から出発し, p_i の「右側」に沿って点 u_i の直前で u_i を囲むように反時計回りにほぼ 1 周し, p_i にぶつかる直前から p_i の「右側」に沿って点 R に帰って来る, というようにして, 基本群 $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{u_1, \dots, u_{\mu_f}\}, R)$ の元が得られる. これを道 p_i に付随するループといい, l_i であらわす. Picard–Lefschetz 理論によって, モノドロミー表現と同型 $\text{Aut}(H_2(F^{-1}(R); \mathbb{Z})) \cong \text{Aut}(H_2(f^{-1}(R); \mathbb{Z}))$ が

ら得られる群準同型

$$\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{u_1, \dots, u_{\mu_f}\}, R) \longrightarrow \text{Aut}(H_2(F^{-1}(R); \mathbb{Z})) \cong \text{Aut}(H_2(f^{-1}(R); \mathbb{Z}))$$

による l_i の像は α_i に関する鏡映 r_{α_i} であることがわかる.

命題 3.15 ([19]). 消滅サイクルの格別基底 $(\alpha_1, \dots, \alpha_{\mu_f})$ はルート系 \mathcal{R}_f のルート基底である.

このことは、**判別式集合**と呼ばれる M の部分集合 \mathcal{D} を導入し、 $M \setminus \mathcal{D}$ の基本群においてループ l_1, \dots, l_{μ_f} の合成と c_f を定めたときに用いたループを比較することで示される. 判別式集合 $\mathcal{D} \cdot$ 部分集合 $\mathcal{B} \cdot$ 集合 B_f の代数・幾何は極めて密接に関係しており、本来同時並行で解説すべきものであるが、本稿では内容を非常に限定し、判別式集合に関わる部分は全面的に省略することにした.

消滅サイクルの格別基底の特徴付けとして、次のことが知られている：

定理 3.16 (Deligne [7]). f を上述の ADE 型特異点を定める 3 変数多項式とするとき、

$$B_f = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_{\mu_f}) \in \mathcal{N}_f^{\mu_f} \mid r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_{\mu_f}} = c_f\}$$

が成立する. とくに、

$$B_f/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mu_f} \cong \{(r_1, \dots, r_{\mu_f}) \in W(\mathcal{R}_f)^{\mu_f} \mid r_1 \cdots r_{\mu_f} = c_f\}$$

である.

注意 3.17. B_f および $B_f/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mu_f}$ がそれぞれ右辺の部分集合であることは定義から明らかである. Deligne は $\{(r_1, \dots, r_{\mu_f}) \in W(\mathcal{R}_f)^{\mu_f} \mid r_1 \cdots r_{\mu_f} = c_f\}$ への Br_{μ_f} -作用が推移的であることを示すことで、逆向きの包含関係を証明した.

この定理により、ADE 型の多項式 f に対する消滅サイクルの格別基底の数は、有限ルート系における問題に帰着された.

4. 有限 ADE 型の場合

\bar{Q} を階数 μ の有限ルート系 \mathcal{R} の単純ルート基底に関する Coxeter-Dynkin 図形とする. ただし、ルート系 \mathcal{R} は既約とは仮定せず、Coxeter-Dynkin 図形は既約なものの非交和である. また、 c を \mathcal{R} のある単純ルート基底 $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\mu\}$ を用いて $c = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_\mu}$ とあらわされる Coxeter 元とする. このとき、

$$e(\bar{Q}) := |\{(r_1, \dots, r_\mu) \in W(\mathcal{R})^\mu \mid r_1 \cdots r_\mu = c\}|$$

と定める. Weyl 群 $W(\mathcal{R})$ が有限群であることから、 $e(\bar{Q})$ が正の整数であることがわかる.

定理 4.1 (Deligne [7]). \bar{Q} を有限ルート系 \mathcal{R} の単純ルート基底に関する Coxeter-Dynkin 図形、 $\bar{Q}^{(v)}$ を \bar{Q} から頂点 v と v に端点をもつ辺を取り除いて得られる Coxeter-Dynkin 図形とする. このとき、漸化式

$$e(\bar{Q}) = \frac{h}{2} \sum_{v \in \bar{Q}_0} e(\bar{Q}^{(v)}) \quad (4.1)$$

が成立する. ただし、 \bar{Q}_0 は \bar{Q} の頂点集合、 h は Coxeter 元 c の位数とする.

とくに、 \mathcal{R} が A_μ 型ルート系の場合には、 $\tilde{h}_{0;\mu+1} = e(A_\mu)$ のもとで、漸化式 (1.2) が得られる。
漸化式 (4.1) を用いて $e(\bar{Q})$ を求めることにより、Looijenga の予想 [14] が解決される：

系 4.2. f を ADE 型多項式とする。このとき等式

$$|B_f/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mu_f}| = \frac{\mu!}{d_1 \cdots d_\mu} h^\mu = \text{deg LL}$$

が成立する。ただし、 $2 \leq d_1 \leq \cdots \leq d_\mu = h$ は代数的独立な $W(\mathcal{R})$ 不変式の次数とする。

ここで、 $W(\mathcal{R})$ 不変式の空間と M の同一視により、 $d_{\mu-i+1}/h$ が M の斉次座標 s_i の次数 $\text{deg } s_i$ を与える（次の例のように、 s_i の添え字 i は i が大きくなるにつれて次数 $\text{deg } s_i$ が小さくなるように習慣的に選んでいる）。

例 4.3 (D_4 型). $f = x_1^3 + x_1x_2^2 + x_2^3$ の普遍開折 $F = x_1^3 + x_1x_2^2 + x_3^2 + s_1 + s_2x_1 + s_3x_2 + s_4x_1x_2$ に対して、 $\text{deg } s_1 = 1$, $\text{deg } s_2 = 2/3$, $\text{deg } s_3 = 2/3$, $\text{deg } s_4 = 1/3$ である。

$$\text{deg LL} = \frac{4!}{1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}} = 2 \cdot 3^4 = 162.$$

一方で、 f に付随する一般ルート系は D_4 型ルート系と単純ルート基底によってあらわされる Coxeter 元の組である。漸化式 (4.1) により、

$$\begin{aligned} e(D_4) &= \frac{6}{2} (3e(A_3) + e(A_1 \times A_1 \times A_1)) = \frac{6}{2} \left(3e(A_3) + \frac{3!}{1!1!1!} e(A_1)^3 \right) \\ &= \frac{6}{2} \left(3(3+1)^{3-1} + \frac{3!}{1!1!1!} \cdot (1+1)^{1-1} \cdot (1+1)^{1-1} \cdot (1+1)^{1-1} \right) = 162 \end{aligned}$$

となる。

5. 一般ルート系の圏論的構成

\bar{Q} に（任意の）向きを入れることによってルート系は圏化される。つまり、Dynkin 籠 Q を取り（ここでは Dynkin 籠の直積として得られる非連結な籠も Dynkin 籠と呼ぶことにする）、その経路代数 $\mathbb{C}Q$ 上の有限次元加群のなすアーベル圏 $\text{mod-}\mathbb{C}Q$ やそれらの有界複体のなす導来圏 $\mathcal{D}^b(\mathbb{C}Q) := \mathcal{D}^b(\text{mod-}\mathbb{C}Q)$ を考える。例えば $\bar{Q} = A_\mu$ のとき Q として $\bullet_1 \rightarrow \bullet_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \bullet_\mu$ という籠 Q を取ることができるが、このとき $\mathbb{C}Q$ は $\mu \times \mu$ の上三角行列全体のなす（非可換） \mathbb{C} -代数である。加群圏よりもその導来圏を用いるのは、その見かけの複雑さにも関わらず、むしろより根源的な性質を残した簡素なものになっているからである。というのも加群圏は \bar{Q} に付加される向きの情報に極めて強く依存するが、導来圏はどのように向きを入れたとしてもその三角圏としての構造は変わらないからである。

導来圏から一般ルート系を導くにあたり、ルート基底の圏化としての完全例外列の概念が鍵となっている。そこでまず三角圏における完全例外列について簡単に述べておく。

定義 5.1. \mathcal{D} を \mathbb{C} -線型な三角圏とする。また、任意の $X, Y \in \mathcal{D}$ に対して $\dim_{\mathbb{C}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y[p]) < \infty$ であるとする。

- (i) 対象 $E \in \mathcal{D}$ について $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(E, E) \cong \mathbb{C}$, $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(E, E[p]) \cong 0$ ($p \neq 0$) となる時、 E は例外的対象であるという。

- (ii) 例外的対象 E_1, \dots, E_l からなる列 $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_l)$ が $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(E_i, E_j[p]) \cong 0$ ($i > j, p \in \mathbb{Z}$) をみたすとき、列 \mathcal{E} は**例外列**であるという。
- (iii) \mathcal{D} における例外列 $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_\mu)$ が \mathcal{D} を三角圏として生成するとき、つまり E_1, \dots, E_μ を含む最小の充満部分三角圏が \mathcal{D} 全体と同値になるとき、 \mathcal{E} は**完全**であるという。
- (iv) \mathcal{D} における完全例外列 $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_\mu)$, $\mathcal{F} = (F_1, \dots, F_\mu)$ について $E_i \cong F_i$ ($i = 1, \dots, \mu$) が成立するとき、 \mathcal{E} と \mathcal{F} は同型であるという。 \mathcal{D} における完全例外列の同型類全体のなす集合を $\text{FEC}(\mathcal{D})$ であらわす。

なお、例外的対象 $E \in \mathcal{D}$ は直既約対象である。つまり、 $E \cong X \oplus Y$ となるならば X または Y は零対象となる。また、本稿で登場するような導来圏は遺伝的アーベル圏 \mathcal{A} の有界導来圏 $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ と圏同値であるようなものである。つまりアーベル圏 \mathcal{A} は任意の対象 $X, Y \in \mathcal{A}$ に対して $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^p(X, Y) = 0$ ($p \geq 2$) となるものであって、 $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ における直既約対象の集合 $\text{Ind}(\mathcal{D}^b(\mathcal{A}))$ および例外的対象の集合 $\text{Exc}(\mathcal{D}^b(\mathcal{A}))$ はそれぞれ

$$\text{Ind}(\mathcal{D}^b(\mathcal{A})) = \bigsqcup_{p \in \mathbb{Z}} (\text{Ind}(\mathcal{D}^b(\mathcal{A})) \cap \mathcal{A})[p] \quad \text{Exc}(\mathcal{D}^b(\mathcal{A})) = \bigsqcup_{p \in \mathbb{Z}} (\text{Exc}(\mathcal{D}^b(\mathcal{A})) \cap \mathcal{A})[p],$$

とあらわされる。ただし、 \mathcal{A} の対象を 0 次に集中した複体とみなすことで得られる自然な函手 $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ によって、 \mathcal{A} を $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ の充満部分三角圏と同一視する。

群準同型 $\text{Br}_\mu \rightarrow S_\mu$, $b_i \mapsto (i, i+1)$ および \mathbb{Z}^μ 上の自然な S_μ -作用を定める群準同型 $S_\mu \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^\mu)$ の合成を考えることにより、braid 群 Br_μ と自由アーベル群 \mathbb{Z}^μ の半直積 $\text{Br}_\mu \ltimes \mathbb{Z}^\mu$ が定まる。この群 $\text{Br}_\mu \ltimes \mathbb{Z}^\mu$ は以下のように完全例外列の集合 $\text{FEC}(\mathcal{D})$ に作用する：

命題 5.2 (Bondal–Polishchuk [3]). \mathcal{D} は完全例外列を持つ \mathbb{C} -線型な三角圏とする。群 $\text{Br}_\mu \ltimes \mathbb{Z}^\mu$ は完全例外列の集合 $\text{FEC}(\mathcal{D})$ に

$$\begin{aligned} (E_1, \dots, E_\mu) \cdot b_i &:= (E_1, \dots, E_{i-1}, \mathcal{L}_{E_i} E_{i+1}, E_i, E_{i+2}, \dots, E_\mu), \\ (E_1, \dots, E_\mu) \cdot e_i &:= (E_1, \dots, E_{i-1}, E_i[1], E_{i+1}, \dots, E_\mu), \end{aligned}$$

として右から作用する。ここで、対象 $\mathcal{L}_{E_i} E_{i+1}$ を完全三角形

$$(\mathcal{L}_{E_i} E_{i+1})[-1] \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}^\bullet(E_i, E_{i+1}) \otimes E_i \xrightarrow{\text{ev}} E_{i+1} \rightarrow \mathcal{L}_{E_i} E_{i+1},$$

によって定め、 e_i は \mathbb{Z}^μ の i 番目の生成元とする。

また、 \mathcal{D} の自己同値群 $\text{Auteq}(\mathcal{D})$ が $\text{FEC}(\mathcal{D})$ に

$$\Phi(E_1, \dots, E_\mu) := (\Phi(E_1), \dots, \Phi(E_\mu)), \quad \Phi \in \text{Auteq}(\mathcal{D}).$$

として作用することにも注意しておきたい。

命題 5.3 (白石–高橋–和田 [24]). \mathcal{D} は完全例外列 $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_\mu)$ を持つ \mathbb{C} -線型な三角圏とする。 \mathcal{D} は性質

- (i) 群 $\text{Br}_\mu \ltimes \mathbb{Z}^\mu$ の集合 $\text{FEC}(\mathcal{D})$ への作用は推移的である。
 - (ii) 任意の例外的対象 $E' \in \mathcal{D}$ に対して、ある完全例外列 \mathcal{E}' で E' を含むものが存在する。
- を持つとする。このとき、以下のようにして一般ルート系 $(\mathcal{N}, I, \Delta_{re}, c)$ が構成される：

- \mathcal{N} を \mathcal{D} の **Grothendieck 群** $K_0(\mathcal{D})$ と定める.
- 交叉形式 I を対称化 Euler 形式 $\chi + \chi^T$ で定める. ただし, **Euler 形式** χ は

$$\chi([X], [Y]) := \sum_{p \in \mathbb{Z}} (-1)^p \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y[p]), \quad X, Y \in \mathcal{D}$$

で定まる $\mathcal{N} = K_0(\mathcal{D}^b(\mathbb{C}Q))$ 上の双線型形式とする.

- 実ルートの集合 Δ_{re} は, 集合 $B := \{[E_1], \dots, [E_\mu]\} \subset K_0(\mathcal{D})$ を用いて

$$\Delta_{re}(\mathcal{D}) := W_B B, \quad W_B := \langle r_{[E_1]}, \dots, r_{[E_\mu]} \rangle \subset \text{Aut}_{\mathbb{Z}}(K_0(\mathcal{D}), \chi + \chi^T),$$

で定める.

- *Coxeter* 元は \mathcal{D} 上の **Serre 函手** $S \in \text{Auteq}(\mathcal{D})$ と逆平行移動函手 $[-1]$ の合成が *Grothendieck* 群上に誘導する自己同型として, $c := [S[-1]]$ と定める.

なお, 本稿に登場する具体的な導来圏については, 条件 (i) および (ii) はいずれももみたされている (Crawley-Boevey [5], Ringel [21], Meltzer [15] を参照).

注意 5.4. 池田氏・白石氏・大谷氏との議論の中で, 一般ルート系の構成および主張を若干修正することにより, ここで仮定した条件 (i) および (ii) はいずれも弱められることがわかった. (i) については $\text{Br}_\mu \rtimes \mathbb{Z}^\mu$ -作用の各軌道が三角圏 \mathcal{D} の自己同値群の作用で移りあえばよい. (ii) については, ルートの集合を定義する際に, ある完全例外列に含まれるような例外的対象のみを考察すべきであった. そうすると, \mathcal{D} により一般ルート系の同型類が定まることがわかる (一般ルート系自体はいくつかの選択に依存しうる).

Obaid-Nauman-Shammakh-Fakien-Ringel [17] は Deligne の漸化式 (4.1) を Dynkin 籠の導来圏 $\mathcal{D}^b(\mathbb{C}Q)$ によって導出した:

定理 5.5. Q を *Dynkin* 籠, $Q^{(v)}$ を Q から頂点 v と v に端点をもつ矢印を取り除いて得られる *Dynkin* 籠とする. $e(Q) := |\text{FEC}(\mathcal{D}^b(\mathbb{C}Q))/\mathbb{Z}^\mu|$ とするとき,

$$e(Q) = \frac{h}{2} \sum_{v \in Q_0} e(Q^{(v)})$$

が成立する. ただし, Q_0 は Q の頂点集合, h は *Coxeter* 元 c の位数とする.

Q が 1 頂点からなる *Dynkin* 籠のとき. つまり $Q = \vec{A}_1$ のとき, $\mathcal{D}^b(\mathbb{C}\vec{A}_1)$ は複素ベクトル空間の有界複体のなす導来圏 $\mathcal{D}^b(\text{mod-}\mathbb{C})$ に他ならず, 容易に $e(\vec{A}_1) = 1$ であることがわかる. したがって, 直ちに $e(Q) = e(\vec{Q})$ などすでに登場した数たちとの一致がわかるのだが, これにはもう少し深い理由がある.

定理 5.6 (Seidel [22]). f を *ADE* 型多項式, Q を f と同じ型の *Dynkin* 籠とする. このとき, 三角圏の同値

$$\mathcal{D}^b(\text{Fuk}^\rightarrow(f)) \cong \mathcal{D}^b(\mathbb{C}Q)$$

が成立する. ここで, $\mathcal{D}^b(\text{Fuk}^\rightarrow(f))$ は f に対する **有向深谷圏の導来圏** と呼ばれる三角圏である.

定理の主張における三角圏の同値は **ホモロジー的ミラー対称性** と呼ばれる. 有向深谷圏 $\text{Fuk}^\rightarrow(f)$ は消滅サイクルの格別基底を Lagrangian–Floer 理論によって圏化したもので, A_∞ 圏と呼ばれるものになっている. また, その導来圏 $\mathcal{D}^b(\text{Fuk}^\rightarrow(f))$ は三角圏の構造を持つ. ホモロジー群の元である消滅サイクルを

部分多様体 (+付加データ) に持ち上げることで、とくにその向き付け ($\in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) を幾何学を用いて \mathbb{Z} に持ち上げることで、消滅サイクルの格別基底は $\mathcal{D}^b(\mathrm{Fuk}^\rightarrow(f))$ における完全例外列を定めることになる。そのため、単写像

$$\mathcal{B}_f/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\mu \hookrightarrow \mathrm{FEC}(\mathcal{D}^b(\mathrm{Fuk}^\rightarrow(f)))/\mathbb{Z}^\mu \cong \mathrm{FEC}(\mathcal{D}^b(\mathbb{C}Q))/\mathbb{Z}^\mu$$

が得られる。この両辺への braid 群作用は整合的であり、またいずれも推移的であることから、この写像が 1 対 1 対応である、つまり $|\mathcal{B}_f/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\mu| = e(Q)$ であることがわかる。

また、漸化式 (4.1) の意味も圏論的に説明される。アイデアについて少しだけ述べると、完全例外列 (E_1, \dots, E_μ) の分類を例外的対象 E_μ およびその右半直交部分圏 $E_\mu^\perp := \{X \in \mathcal{D} \mid \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E_\mu, X) = 0\}$ の分類に帰着するというものである。そこで、右半直交部分圏 E_μ^\perp が再びある Dynkin 筋 Q' (とくに一般的には非連結) を用いて $\mathcal{D}^b(\mathbb{C}Q')$ とあらわされること、数え上げる際に自己同値関手の等式 $(S[-1])^h = [2]$ を効果的に用いること (係数の $h/2$ の由来)、が要点である。

6. オービフォールド射影直線と鳥賊と蝟

これまでの話をアフィン ADE 型や楕円型の場合に拡張するために、オービフォールド射影直線について必要最小限の準備を行っておく。

r を 3 以上の整数、 $A = (a_1, \dots, a_r)$ を 2 以上の整数の組、 $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ を $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上の互いに相異なる r 点の組で $\lambda_1 = \infty, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$ と正規化したものとする。この組合せ論的データ (A, Λ) に対して、代数幾何学的対象を与えることができる。

まず、環 $S_{A, \Lambda}$ を

$$S_{A, \Lambda} := \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r] / (X_i^{a_i} - X_2^{a_2} + \lambda_i X_1^{a_1}; i = 3, \dots, r).$$

で定める。さらに、 r 個の文字 $\vec{X}_i, i = 1, \dots, r$ で生成される自由アーベル群の商として定まるアーベル群

$$L_A := \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}\vec{X}_i / (a_i \vec{X}_i - a_j \vec{X}_j; 1 \leq i < j \leq r)$$

を考える。このとき、 $S_{A, \Lambda}$ は自然に L_A で次数づけられることが直ちにわかる。有限生成 L_A -次数付き $S_{A, \Lambda}$ -加群の圏を $\mathrm{gr}^{L_A}\text{-}S_{A, \Lambda}$ で、有限長さの L_A -次数付き $S_{A, \Lambda}$ -加群のなす $\mathrm{gr}^{L_A}\text{-}S_{A, \Lambda}$ の充満部分圏を $\mathrm{tor}^{L_A}\text{-}S_{A, \Lambda}$ であらわすことにする。

定義 6.1 (Geigle–Lenzing [10]). 商スタック $\mathbb{P}_{A, \Lambda}^1$ を

$$\mathbb{P}_{A, \Lambda}^1 := [(\mathrm{Spec}(S_{A, \Lambda}) \setminus \{0\}) / \mathrm{Spec}(kL_A)],$$

で定め、 (A, Λ) 型のオービフォールド射影直線または Geigle–Lenzing 重み付き射影直線 (Geigle–Lenzing weighted projective line) という。

名前のとおり、 \mathbb{P}^1 およびその上の r 点 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ で位数 a_1, \dots, a_r の安定化群によって決まる軌道体 (オービフォールド) であって、それを代数幾何学的に述べたものである。

オービフォールド射影直線 $\mathbb{P}_{A, \Lambda}^1$ 上の接続層の圏を $\mathrm{coh}(\mathbb{P}_{A, \Lambda}^1)$ で、その有界導来圏を $\mathcal{D}^b(\mathbb{P}_{A, \Lambda}^1)$ であらわす。このとき、定義により、通常の射影的代数多様体における Serre の定理の類似、

$$\mathrm{coh}(\mathbb{P}_{A, \Lambda}^1) = \mathrm{gr}^{L_A}\text{-}S_{A, \Lambda} / \mathrm{tor}^{L_A}\text{-}S_{A, \Lambda}$$

が成立することに注意しておく．とくに， $S_{A,\Lambda}(\vec{l}) \vec{l} \in L_A$ の $\text{coh}(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1)$ における同値類を $\mathcal{O}(\vec{l})$ であらわす．
また，同じ組合せ論的データ (A, Λ) に対して，表現論的对象を与えることができる．

定義 6.2 ([24]). 関係式付き籠の経路代数 $\mathbb{C}\tilde{\mathbb{T}}_{A,\Lambda} := \mathbb{C}\tilde{\mathbb{T}}_A/\mathcal{I}_\Lambda$ を以下の手順で定め，これを (A, Λ) 型の**蛸 (octopus)** とよぶ．ただし， $\mu_A := 2 + \sum_{i=1}^r (a_i - 1)$ とする．

(i) 籠 $\tilde{\mathbb{T}}_A = (\tilde{\mathbb{T}}_{A,0}, \tilde{\mathbb{T}}_{A,1}, s, t)$ を以下で定める：

- 頂点の集合 $\tilde{\mathbb{T}}_{A,0}$ を次のものとする：

$$\tilde{\mathbb{T}}_{A,0} := \mathbb{T}_{A,0} \amalg \{\mu_A\} = \{1\} \amalg \left(\prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^{a_i-1} \{(i, j)\} \right) \amalg \{\mu_A\}.$$

- 矢の集合 $\tilde{\mathbb{T}}_{A,1}$ は

$$\tilde{\mathbb{T}}_{A,1} := \mathbb{T}_{A,1} \amalg \left(\prod_{i=1}^r \{f_{i,\mu_A}\} \right) = \left(\prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^{a_i-1} \{f_{i,j}\} \right) \amalg \left(\prod_{i=1}^r \{f_{i,\mu_A}\} \right)$$

であるとし，各矢 f の始点 $s(f)$ と終点 $t(f)$ は次で与えられるものとする：

$$s(f_{i,1}) = 1, \quad t(f_{i,1}) = (i, 1), \quad i = 1, \dots, r,$$

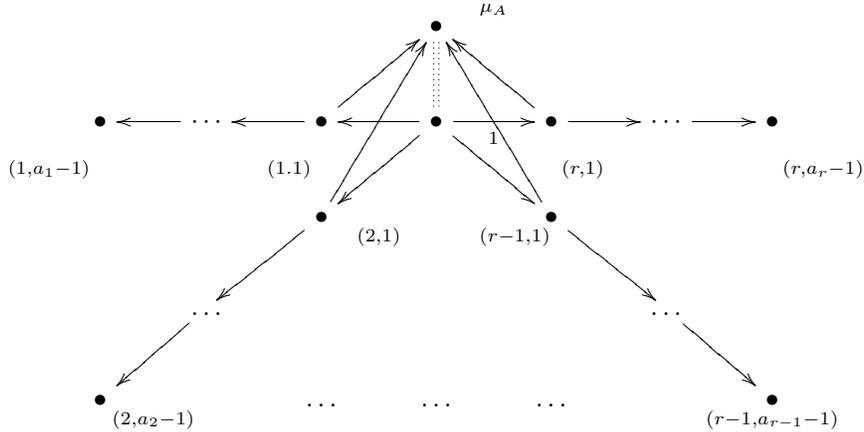
$$s(f_{i,j}) = (i, j-1), \quad t(f_{i,j}) = (i, j), \quad i = 1, \dots, r, \quad j = 2, \dots, a_i - 1,$$

$$s(f_{i,\mu_A}) = (i, 1), \quad t(f_{i,\mu_A}) = \mu_A, \quad i = 1, \dots, r.$$

(ii) 経路代数 $k\mathbb{T}_A$ のイデアル \mathcal{I}_Λ を

$$\mathcal{I}_\Lambda := \left\langle \sum_{i=1}^r \lambda_i^{(1)} f_{i,1} f_{i,\mu_A}, \sum_{i=1}^r \lambda_i^{(2)} f_{i,1} f_{i,\mu_A} \right\rangle,$$

で定める．ここで， $(\lambda_1^{(1)}, \lambda_1^{(2)}) = (1, 0)$ および $(\lambda_i^{(1)}, \lambda_i^{(2)}) = (\lambda_i, 1)$ ， $i = 2, \dots, r$ とする．



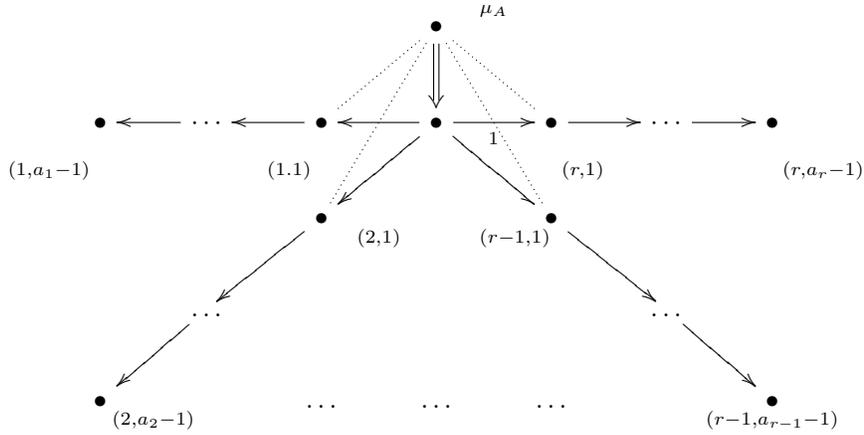
圏 $\text{coh}(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1)$ および $D^b(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1)$ の表現論的側面が Geigle–Lenzing [10] において研究されており，その帰結として次の主張が得られる：

定理 6.3. 三角圏の同値

$$\mathcal{D}^b(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1) \cong \mathcal{D}^b(\mathbb{C}\tilde{\mathbb{T}}_{A,\Lambda})$$

が成立する.

注意 6.4. Clawley-Boevey は [5] において烏賊 (squid) と呼ばれる関係式付き箭の経路代数を与えている :



烏賊と蛸は異なるものであるが大変よく似ている. それらの代数自体は同型ではないがその導来圏は圏同値である. とくに, 群 $\text{Br}_{\mu_A} \times \mathbb{Z}^{\mu_A}$ の集合 $\text{FEC}(\mathcal{D}^b(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1))$ への作用は推移的であるので, 烏賊と蛸は braid の元と平行移動で行き来できる親戚関係にある (ただし r は変わらず, 10本の足が8本になったりするようなことはない).

導来圏 $\mathcal{D}^b(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1)$ に対して命題 5.3 の構成を行うことにより, 一般ルート系を系統的に導出することができる. そして

$$\chi_A := 2 + \sum_{i=1}^r \left(\frac{1}{a_i} - 1 \right)$$

をオービフォールド Euler 標数とすると, χ_A の値が正か零か負かによって, まず大まかに3種類に分類できる. 注意 2.8 で述べた, アフィン型・楕円型・カस्प型のルート系にそれぞれ対応する. とくに, $\chi_A > 0$ ならば A は $(1, p, q)$, $(2, 2, r)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 3, 5)$ のいずれか, $\chi_A = 0$ ならば A は $(2, 2, 2, 2)$, $(3, 3, 3)$, $(2, 4, 4)$, $(2, 3, 6)$ のいずれか, と分類されることに注意する.

とくに $A = (2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 3, 5)$ のとき, $\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1$ は2次元球面の正四面体群, 正八面体群, 正二十面体群による商として得られる軌道体である.

7. アフィン ADE 型の場合

有限ルート系の場合の話のアフィン型の場合に拡張する際に問題となるのは, 極めて当たり前であるが, 有限であったいくつかの量が無限になってしまうことである. 例えば, $A = (1, 1, 1)$ の場合を考える. 導来圏 $\mathcal{D}^b(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1)$ から得られる一般ルート系はいわゆる A_1 型のアフィンルート系 \tilde{A}_1 で, $I(\alpha_1, \alpha_2) = -2$ をみたすルート基底 $B = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ を持ち, Coxeter 元 c は積 $r_{\alpha_1} r_{\alpha_2}$ となることからわかる. ところが, $\delta := \alpha_2 - \alpha_1$

としたとき, $c = r_{\alpha_1+k\delta}r_{\alpha_2+k\delta}$, $k \in \mathbb{Z}$ が成立することが容易にわかる. したがって, 有限ルート系の場合に考えた集合の安易な類似

$$\{(r_1, r_2) \in W(\tilde{A}_1)^2 \mid r_1 \cdot r_2 = c\}$$

はもはや有限集合ではない. もとの圏の言葉で言い換えると, 導来圏 $\mathcal{D}^b(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1)$ は通常の射影直線 \mathbb{P}^1 の連接層の導来圏 $\mathcal{D}^b(\mathbb{P}^1)$ と同値であり,

$$\mathrm{FEC}(\mathcal{D}^b(\mathbb{P}^1))/\mathbb{Z}^2 = \{(\mathcal{O}(k), \mathcal{O}(k+1)) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

であることもすぐにわかる.

一方で,

$$\{(I(\alpha_i, \alpha_j)) \mid (\alpha_1, \alpha_2) \text{ はルート基底}\}$$

という集合 (Cartan 行列の集合) は, I が半正定値であるから成分として $0, \pm 1, \pm 2$ しか持ちえないので, 有限集合であることがわかる. このことから, $\mathcal{D}^b(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1)$ の自己同値群 $\mathrm{Auteq}(\mathcal{D}^b(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1))$ の適切な無限部分群による $\mathrm{FEC}(\mathcal{D}^b(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1))/\mathbb{Z}^{\mu_A}$ を考えれば良い有限集合が得られるのではないかと, というアイデアに到達する.

どのような部分群を考えると良いかのヒントはミラー対称性における幾何学的考察から得られる. 以下の主張には多数の研究者の様々な貢献が含まれるので, 文献等は [25] にまとめたものから適宜参照されたい.

定理 7.1. $\chi_A > 0$ とする. このとき, 三角圏の同値

$$\mathcal{D}^b(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1) \cong \mathcal{D}^b(\mathbb{C}\tilde{\mathbb{T}}_{A,\Lambda}) \cong \mathcal{D}^b(\mathbb{C}Q_A) \cong \mathcal{D}^b(\mathrm{Fuk}^\rightarrow(f_A))$$

が成立する. ここで Q_A は A に対応する型の拡大 *Dynkin* 籠, $f_A := x_1^{a_1} + x_2^{a_2} + x_3^{a_3} - q^{-1}x_1x_2x_3$, $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ である.

注意 7.2. $\chi_A > 0$ のとき, $f_A := x_1^{a_1} + x_2^{a_2} + x_3^{a_3} - q^{-1}x_1x_2x_3$ を **アフィンカスプ多項式** と呼ぶ.

f_A の普遍開折 F_A を, 底空間 $M_A := \mathbb{C}^{\mu_A-1} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})$ 上大域的に,

$$F_A := x_1^{a_1} + x_2^{a_2} + x_3^{a_3} - s_{\mu_A}^{-1}x_1x_2x_3 + s_1 + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{a_i-1} s_{i,j}x_i^j$$

として与えることができる. ここで注意したいのは,

$$\deg s_1 = 1, \quad \deg s_{i,j} = \frac{a_i - j}{a_i}, \quad \deg s_{\mu_A} = \chi_A$$

はすべて正であることと, $\pi_1(M_A) \cong \mathbb{Z}$ ということである. Lyashko–Looijenga 写像 $\mathrm{LL}_A : M_A \setminus \mathcal{B}_A \rightarrow \mathrm{Conf}(\mathbb{C}, \mu_A)$ は不分岐正則被覆写像となり, その次数は

$$\deg \mathrm{LL}_A = \frac{\mu_A!}{\deg s_1 \cdot \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^{a_i-1} \deg s_{i,j} \cdot \deg s_{\mu_A}} = \frac{\mu_A!}{a_1!a_2!a_3!\chi_A} a_1^{a_1} a_2^{a_2} a_3^{a_3}$$

で与えられることがわかる (Dubrovin–Zhang[8] と石橋–白石–高橋 [12] の組み合わせによる帰結). ここでミラー対称性のアイデアに基づくと, $\mathcal{D}^b(\mathrm{Fuk}^\rightarrow(f_A))$ に対する Bridgeland 安定性条件の空間を自己同値群 $\mathrm{Auteq}(\mathcal{D}^b(\mathrm{Fuk}^\rightarrow(f_A)))$ の部分群で商を取ったものが M_A である, と期待できる. Bridgeland 安定性

条件の空間と自己同値群のいずれも三角圏の不変量なので、結論として、 $\pi_1(M_A) \cong \mathbb{Z}$ と同型な部分群を $\text{Auteq}(\mathcal{D}^b(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1))$ を探すことになるのである。

ある組 (A, Λ) (ただし $\chi_A \geq 0$) および Dynkin 籠 Q を用いて $\mathcal{D}^b(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1) \times \mathcal{D}^b(\mathbb{C}Q)$ とあらわされる三角圏を \mathcal{D} とする。Seidel–Thomas [23] に基づき、 \mathcal{D} における球面捻り関手のなす自己同値群を考えてゆく。

定義 7.3. 対象 $S \in \mathcal{D}$ であって、 $\mathcal{S}(S) \cong S[1]$ および $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(S, S[p]) \cong \mathbb{C}$ ($p = 0, 1$), $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(S, S[p]) = 0$ ($p \neq 0, 1$), をみたすものを、**球面的対象**という。

注意 7.4. 「 \mathcal{D} の次元」が 1 以下となるので、本来 1-球面的対象というべきものをここでは単に球面的対象と呼んでいる。

球面的対象 $S \in \mathcal{D}$ に対して、**球面捻り**と呼ばれる自己同値関手 $\text{Tw}_S \in \text{Auteq}(\mathcal{D})$ を

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}^{\bullet}(S, X) \otimes S \longrightarrow X \longrightarrow \text{Tw}_S(X), \quad X \in \mathcal{D}$$

により定義する。また、球面捻りで生成される $\text{Auteq}(\mathcal{D})$ の部分群を $\text{ST}(\mathcal{D})$ であらわす。

注意 7.5. $\text{ST}(\mathcal{D})$ という名前は、Seidel–Thomas および Spherical Twist にちなんで、[18] で導入したものである。

詳細は省略するが、群 $\text{ST}(\mathcal{D})$ はリーマン面の写像類群の類似物で、とくに球面捻りは Dehn 捻りの類似物である。そして、以下の補題は、写像類群における「Alexander method」の類似物で、完全例外列の数え上げの帰納的構造に極めて重要な役割を果たす。

補題 7.6 (大谷–白石–高橋 [18]). $E \in \mathcal{D}$ を例外的対象、 $S \in \mathcal{D}$ を球面的対象とする。 $\text{Tw}_S(E) \cong E$ となる必要十分条件は $S \in E^{\perp}$ となることである。とくに

$$\text{ST}(E^{\perp}) \cong \langle \text{Tw}_S \in \text{ST}(\mathcal{D}) \mid S \text{ は } \mathcal{D} \text{ の球面的対象, } \text{Tw}_S(E) \cong E \rangle$$

が成立する。

これでようやくアフィン型に対する主張を述べる準備が整った。

定理 7.7 ([18]). $\chi_A > 0$ のとき、 $\text{ST}(\mathcal{D}^b(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1)) = \langle (-) \otimes \mathcal{O}(\vec{c}_A) \rangle \cong \mathbb{Z}$ が成立する。ただし、 $\vec{c}_A := a_1 \vec{X}_1 = \dots = a_r \vec{X}_r$ とする。また、

$$e(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1) := |\text{FEC}(\mathcal{D}^b(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1)) / \langle \text{ST}(\mathcal{D}^b(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1)), \mathbb{Z}^{\mu_A} \rangle|$$

とするとき、漸化式

$$e(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1) = \frac{1}{\chi_A} \sum_{v \in (Q_A)_0} e(Q_A^{(v)}) + \sum_{i=1}^3 a_i \sum_{j=1}^{a_i-1} \binom{\mu_A - 1}{j-1} \cdot e(\mathbb{P}_{A_{(i,j)},\Lambda}^1) \cdot e(\vec{A}_{j-1}), \quad (7.1)$$

が成立する。ここで、 $Q_A^{(v)}$ は拡大 Dynkin 籠から頂点 v と v に端点をもつ矢印を取り除いて得られる Dynkin 籠、 $A_{(i,j)} := (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i - j, a_{i+1}, \dots, a_r)$ 、 \vec{A}_{j-1} は A_{j-1} 型の Dynkin 籠、 $e(\vec{A}_0) := 1$ とする。

注意 7.8. 導来圏 $\mathcal{D}^b(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1)$ の例外的対象は $\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1$ 上の接続層の平行移動であり、 $\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1$ 上の接続層はベクトル束であるか、点に台をもつ層のいずれかである。式 (7.1) の第 1 項は E_{μ} として $\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1$ 上の例外的ベクトル束を選ぶことに対応し、第 2 項は E_{μ} として点 λ_i 上に台を持つ例外的層を選ぶことに対応する。

Deligne による漸化式 (4.1) やこの漸化式 (7.1), 後で出てくる楕円型の場合の漸化式 (8.1) のいずれも, 例えば Abel の恒等式

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (x-j)^{n-j} y (y+j)^{j-1}$$

およびこれから導かれる恒等式を用いることで, 一般項を求めることができる:

系 7.9. 等式

$$e(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1) = \frac{\mu_A!}{a_1! a_2! a_3! \chi_A} a_1^{a_1} a_2^{a_2} a_3^{a_3}$$

が成立する. とくに, $e(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1) = \deg \text{LL}_A$ である.

例 7.10. $A = (1, 1, 1)$ のとき, $\mu_A = 2$, $\chi_A = 2$ である. $e(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1) = \frac{1}{2}(2e(\vec{A}_1)) = 1 = 2!/1!1!1!2! \cdot 1^1 1^1 1^1$.

例 7.11. $A = (1, 1, 2)$ のとき, $\mu_A = 3$, $\chi_A = 3/2$ である.

$$e(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1) = \frac{2}{3} \cdot e(\vec{A}_2) \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot e(\mathbb{P}_{(3,1),\Lambda}^1) \cdot e(\vec{A}_0) = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 8 = \frac{3!}{1!1!2! \frac{3}{2}} 1^1 1^1 2^2.$$

注意 7.12. $A = (1, p, q)$ のとき, 対称群の元 $(1 \cdots p)(p+1 \cdots p+q)$ の互換による分解の総数

$$\tilde{h}_{0;p,q} := |\{(r_1, \dots, r_{\mu_A}) \in S_{\mu_A}^{\mu_A} \mid r_1 \cdots r_{\mu_A} = (1 \cdots p)(p+1 \cdots \mu_A), r_i \text{ は互換}\}|.$$

について,

$$\tilde{h}_{0;p,q} = \frac{(p+q-1)!}{(p-1)!(q-1)!} p^p q^q = \deg \text{LL}_A$$

となることが知られている (Arnold [1], Dubrovin–Zhang [8]). このとき, 漸化式 (7.1) は Hurwitz 数 $h_{0;p,q} := \frac{\tilde{h}_{0;p,q}}{\gcd(p,q)pq}$ に伴う cut-and-join 方程式に他ならない. 実際, $F_{(1,p,q)}$ を 1 変数化することにより, M_A を底空間とする有理関数の族

$$F_{p,q} = x^p + \left(\frac{s_{\mu_A}}{x}\right)^q + s_1 + \sum_{j=1}^{p-1} s_{2,j} x^j + \sum_{j=1}^{p-1} s_{3,j} \left(\frac{s_{\mu_A}}{x}\right)^j$$

が得られるが, これが対応する Riemann 球面上の有限分岐被覆の族を与えている.

8. 楕円 DE 型の場合

最後に楕円型, つまり $\chi_A = 0$ となる場合, について簡単に触れておく. $\chi_A = 0$ となる A は $(2, 2, 2, 2)$, $(3, 3, 3)$, $(2, 4, 4)$, $(2, 3, 6)$ のみであり, 導来圏 $\mathcal{D}^b(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1)$ から得られる一般ルート系はそれぞれ $D_4^{(1,1)}$, $E_6^{(1,1)}$, $E_7^{(1,1)}$, $E_8^{(1,1)}$ と呼ばれる 4 種類の一般ルート系であって, とくに楕円ルート系と呼ばれるものである (楕円ルート系の詳細は [20] を参照されたい).

定理 8.1 (Takahashi–Zhang [26]). $\chi_A = 0$ のとき, 群 $\text{ST}(\mathcal{D}^b(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1))$ は braid 群 Br_3 のある部分群と同型であって, $\text{ST}(\mathcal{D}^b(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1))/\mathbb{Z}[2] \cong \Gamma(\ell_A)$ をみたすものである. ここで, $\Gamma(\ell_A)$ は

$$\Gamma(\ell_A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, d \equiv 1 \pmod{\ell_A}, b, c \equiv 0 \pmod{\ell_A} \right\},$$

で定義される $\text{SL}(2; \mathbb{Z})$ の主合同部分群であり, $A = (2, 2, 2, 2)$, $(3, 3, 3)$, $(2, 4, 4)$, $(2, 3, 6)$ に対して, それぞれ $\ell_A = 2, 3, 4, 6$ と定める.

さらに,

$$e(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1) := |\text{FEC}(\mathcal{D}^b(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1)) / \langle \text{ST}(\mathcal{D}^b(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1)), \mathbb{Z}^{\mu_A} \rangle|$$

とするとき, 漸化式

$$e(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1) = \sum_{i=1}^r a_i \sum_{j=1}^{a_i-1} \binom{\mu_A-1}{j-1} \cdot e(\mathbb{P}_{A_{(i,j)},\Lambda}^1) \cdot e(\bar{A}_{j-1}) \cdot \frac{[\bar{\Gamma} : \bar{\Gamma}(\ell_A)]}{\ell_A} \quad (8.1)$$

が成立する. ここで, $\bar{\Gamma}(\ell_A)$ は商写像 $\Gamma := \text{SL}(2; \mathbb{Z}) \rightarrow \bar{\Gamma} := \text{SL}(2; \mathbb{Z}) / \{\pm 1\}$ による $\Gamma(\ell_A)$ の像である.

系 8.2 ([26]). $\chi_A = 0$ のとき,

$$e(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1) = \frac{\mu_A!}{a_1! \cdots a_r!} a_1^{a_1} \cdots a_r^{a_r} \cdot \frac{\sum_{i=1}^r a_i^2 (a_i - 1)}{2\mu_A} \cdot \frac{[\bar{\Gamma} : \bar{\Gamma}(\ell_A)]}{\ell_A}$$

が成立する. とくに,

$$|\text{FEC}(\mathcal{D}^b(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1)) / \bar{\Gamma}| = \frac{e(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1)}{[\bar{\Gamma} : \bar{\Gamma}(\ell_A)]} = \frac{\mu_A!}{a_1! \cdots a_r!} a_1^{a_1} \cdots a_r^{a_r} \cdot \frac{\sum_{i=1}^r a_i^2 (a_i - 1)}{2\ell_A \mu_A}$$

である.

一方で, 単純楕円型特異点を定める多項式を Legendre 標準形で与える:

$$\begin{aligned} f_{E_6^{(1,1)}} &:= x_2(x_2 - x_1)(x_2 - \lambda x_1) + x_3^3, & f_{E_7^{(1,1)}} &:= x_1 x_2(x_2 - x_1)(x_2 - \lambda x_1) + x_3^2, \\ f_{E_8^{(1,1)}} &:= x_2(x_2 - x_1^2)(x_2 - \lambda x_1^2) + x_3^2. \end{aligned}$$

これらの普遍開折を, 底空間 $M_{E_k^{(1,1)}} := \mathbb{C}^{\mu_A-1} \times (\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$ 上大域的に.

$$F_{E_6^{(1,1)}} := x_2(x_2 - x_1)(x_2 - \lambda x_1) + x_3^3 + s_1 + \sum_{i=2}^7 s_i \phi_i(x_1, x_2, x_3),$$

$$F_{E_7^{(1,1)}} := x_1 x_2(x_2 - x_1)(x_2 - \lambda x_1) + x_3^2 + s_1 + \sum_{i=2}^8 s_i \phi_i(x_1, x_2, x_3),$$

$$F_{E_8^{(1,1)}} := x_2(x_2 - x_1^2)(x_2 - \lambda x_1^2) + x_3^2 + s_1 + \sum_{i=2}^9 s_i \phi_i(x_1, x_2, x_3),$$

として与えることができる. ただし, $\phi_i(x_1, x_2, x_3)$ は次数 1 以下の単項式で, $\{1, \phi_1, \dots, \phi_{k+1}, \partial f_{E_k^{(1,1)}} / \partial \lambda\}$ が Jacobi 環 $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3] / (\partial f_{E_k^{(1,1)}})$, $k = 6, 7, 8$ の基底をなすものとする.

注意 8.3. Milnor 数 $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3] / (\partial f_{E_k^{(1,1)}})$ は $k+2$ であり, $\mu_A = a_1 + a_2 + a_3 - 1$ に等しい.

注意 8.4. \mathbb{H} を複素上半平面とすると, 複素多様体としての同型 $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \cong \mathbb{H} / \bar{\Gamma}(2)$ が存在する.

定理 8.5 (Hertling–Roucairol [11]). $F_{E_k^{(1,1)}}$, $k = 6, 7, 8$ により定まる *Lyashko–Looijenga* 写像 $\text{LL}_{E_k^{(1,1)}} : M_{E_k^{(1,1)}} \setminus \mathcal{B}_{E_k^{(1,1)}} \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{C}, \mu_A)$ の次数 $\text{deg LL}_{E_k^{(1,1)}}$ は

$$\text{deg LL}_{E_k^{(1,1)}} = \frac{(k+2)!}{\prod_{i=1}^{k+1} \text{deg } s_i} \cdot \left(\frac{1}{2} \sum_{i=2}^{k+1} \frac{1}{\text{deg } s_i} \right)$$

で与えられる. ここで, $\text{deg } s_1, \dots, \text{deg } s_{k+1}$ は具体的に

$$\begin{aligned} E_6^{(1,1)} : 1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \quad E_7^{(1,1)} : 1, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{2}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \\ E_8^{(1,1)} : 1, \frac{5}{6}, \frac{4}{6}, \frac{4}{6}, \frac{3}{6}, \frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

で与えられる.

ここで再びミラー対称性のアイデアに基づくと, $\mathcal{D}^b(\text{Fuk}^\rightarrow(f_{E_k^{(1,1)}}))$ に対する Bridgeland 安定性条件の空間を自己同値群 $\text{Auteq}(\mathcal{D}^b(\text{Fuk}^\rightarrow(f_{E_k^{(1,1)}})))$ の部分群で商を取ったものが $M_{E_k^{(1,1)}}$ である, と期待できる. Bridgeland 安定性条件の空間と自己同値群のいずれも三角圏の不変量なので, $\pi_1(M_{E_k^{(1,1)}}) \cong \overline{\Gamma(2)}$ と同型な $\text{Auteq}(\mathcal{D}^b(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1))$ の部分群による $\text{FEC}(\mathcal{D}^b(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1))$ の商を考えることになる. そして実際に次の結果が得られる:

系 8.6. $A = (3, 3, 3), (2, 4, 4), (2, 3, 6)$ のとき,

$$|\text{FEC}(\mathcal{D}^b(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1))/\overline{\Gamma(2)}| = \frac{e(\mathcal{D}^b(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1))}{[\overline{\Gamma} : \overline{\Gamma(\ell_A)}]} \cdot [\overline{\Gamma} : \overline{\Gamma(2)}] = \frac{\mu_A!}{a_1! \cdots a_r!} a_1^{a_1} \cdots a_r^{a_r} \cdot \frac{\sum_{i=1}^r a_i^2 (a_i - 1)}{2\ell_A \mu_A} \cdot 6,$$

は $\text{deg LL}_{E_k^{(1,1)}}$ と一致する.

注意 8.7. $A = (2, 2, 2, 2)$ のとき, Hertling–Roucairol の定理で $\text{deg } s_1 = 1, \text{deg } s_2 = \text{deg } s_3 = \text{deg } s_4 = \text{deg } s_5 = 1/2$ とおいて形式的に $\text{deg LL}_{D_4^{(1,1)}}$ を定めることにより, 等式 $e(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1) = \text{deg LL}_{D_4^{(1,1)}}$ が得られる. とくにこの等式は Hurwitz 数 $h_{0;1,1,1,1}$ に関する cut-and-join 方程式と ELSV 公式の等価性をあらわす. より正確には, $M_{D_4^{(1,1)}} = \mathbb{C}^5 \times \mathbb{H}$ を底空間とする有理型函数の族

$$F_{D_4^{(1,1)}} = s_2^2 \wp(z; \tau) + s_3^2 \wp(z + \frac{1}{2}; \tau) + s_4^2 \wp(z + \frac{\tau}{2}; \tau) + s_5^2 \wp(z + \frac{1+\tau}{2}; \tau) + s_1$$

と $F_{D_4^{(1,1)}}$ の対称性 $z \mapsto -z$ の組によって $\text{deg LL}_{D_4^{(1,1)}}$ を定めることで, このことが正当化される.

REFERENCES

- [1] V. I. Arnold, *Topological classification of complex trigonometric polynomials and combinatorics of graphs with equal numbers of vertices and links*, *Funct. Anal. Appl.* **30** (1996), 1–17.
- [2] D. Bessis, *Finite complex reflection arrangements are $K(\pi, 1)$* , *Ann. Math.* **18** (2015), 809–904. 7. Björner, A.,
- [3] A. Bondal, A. Polishchuk, *Homological Properties of Associative Algebras: The Method of Helices*, *Izv. RAN. Ser. Mat.*, 1993, Volume **57**, Issue 2, 3–50 (Mi izv877).
- [4] N. Bourbaki, *Lie groups and Lie algebras. Chapters 4–6*, Translated from the 1968 French original by Andrew Pressley *Elem. Math.* (Berlin), Springer-Verlag, Berlin, 2002. xii+300 pp.
- [5] W. Crawley-Boevey, *Indecomposable parabolic bundles and the existence of matrices in prescribed conjugacy class closures with product equal to the identity*, *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.* **100** (2004), 171–207.

- [6] J. Dénes, *The representation of a permutation as the product of a minimal number of transpositions and its connection with the theory of graphs*, Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci., **4** (1959), 63–70.
- [7] P. Deligne, Letter to Looijenga on March 9, 1974.
- [8] B. Dubrovin, Y. Zhang, *Extended affine Weyl groups and Frobenius manifolds*, Compositio Math. **111** (1998), no. 2, 167–219.
- [9] A. Hurwitz, *Über Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten*. Math. Ann., **39** (1891), 1–66.
- [10] W. Geigle and H. Lenzing, *A class of weighted projective curves arising in representation theory of finite-dimensional algebras, Singularities, representation of algebras, and vector bundles* (Lambrecht, 1985), 9–34, Lecture Notes in Math., **1273**, Springer, Berlin, (1987).
- [11] C. Hertling, C. Roucairol, *Distinguished Bases and Stokes Regions for the Simple and the Simple Elliptic Singularities, Moduli Spaces and Locally Symmetric Spaces SMM* **16**, Ch. 2, pp. 39–106.
- [12] Y. Ishibashi, Y. Shiraishi, A. Takahashi, *Primitive forms for affine cusp polynomials*, Tohoku Math. J. (2) **71** (2019), no. 3, 437–464.
- [13] H. Lenzing, H. Meltzer, *The automorphism group of the derived category for a weighted projective line*, Comm. Algebra **28** (2000), no. 4, 1685–1700.
- [14] E. Looijenga, *The complement of the bifurcation variety of a simple singularity*, Invent. Math. **23** (1974), pp. 105–116.
- [15] H. Meltzer, *Exceptional sequences for canonical algebras*, Arch. Math. **64** (1995) 304–312.
- [16] H. Meltzer, *Exceptional Vector Bundles, Tilting Sheaves and Tilting Complexes for Weighted Projective Lines*, Mem. Amer. Math. Soc. **171** (2004), no. 808, viii+139 pp.
- [17] M. A. A. Obaid, S. K. Nauman, W. S. Al Shammakh, W. M. Fakieh, C. M. Ringel, *The number of complete exceptional sequences for a Dynkin algebra*, Colloq. Math. **133** (2013), no. 2, 197–210.
- [18] T. Otani, Y. Shiraishi, A. Takahashi. *The number of full exceptional collections modulo spherical twists for extended Dynkin quivers*, arXiv:2308.04031.
- [19] K. Saito, *Around the Theory of the Generalized Weight System: Relations with Singularity Theory, the Generalized Weyl Group and Its Invariant Theory, Etc*, Amer. Math. Soc. Transl. **183** (1998), pp. 101–143.
- [20] K. Saito, *Extended affine root systems. I. Coxeter transformations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **21** (1985), no. 1, pp. 75–179.
- [21] C. M. Ringel, *The braid group action on the set of exceptional sequences of a hereditary Artin algebra*, Abelian group theory and related topics (Oberwolfach, 1993), Contemp. Math., **171**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 339–352.
- [22] P. Seidel, *More about vanishing cycles and mutation*, Symplectic Geometry and Mirror Symmetry, Proceedings of the 4th KIAS Annual International Conference, World Scientific, (2001), 429–465.
- [23] P. Seidel, R. Thomas, *Braid group actions on derived categories of coherent sheaves*, Duke Math. J. **108** (2001), no. 1, 37–108.
- [24] Y. Shiraishi, A. Takahashi, K. Wada, *On Weyl groups and Artin groups associated to orbifold projective lines*, J. Algebra **453** (2016), 249–290.
- [25] 高橋 篤史, 原始形式・ミラー対称性入門, 岩波書店, ISBN: 9784000298285, (2021), 262pages.
- [26] A. Takahashi, H. Zhang, *Number of full exceptional collections modulo spherical twists for elliptic orbifolds*, arXiv:2311.11110.

大阪大学 大学院理学研究科 数学専攻

Email address: takahashi@math.sci.osaka-u.ac.jp