

# 多重ゼータ値と混合モチーフ

寺杣友秀

## 目次

1. 初めに	1
2. 多重ゼータ値とその積分表示	2
3. 多重ゼータ値と基本群	3
4. ドリinfeldt・アソシエータ	7
5. 混合ホッジ構造と基本群	12
6. 混合テイト・モチーフ	17
7. 重さフィルトレーションと混合楕円モチーフ	19
参考文献	21

## 1. 初めに

ゼータ関数の研究はベルヌーイによって提出された問題に端を発する。それは無限和

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

はどのような値をとるのか？というものである。このような無限級数がこれまでによく知られた数に一致するという保証は無いはずであるが、実際に  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$  となることがオイラーにより発見された。ここで上の様な級数と全く無関係であると思われる円周率  $\pi$ 、つまり三角関数の周期がなぜ出てくるか、というのが不思議な事である。それを複素変数にまで拡張したものとしてゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

が定義される。そこでさらに  $\zeta(3), \zeta(4), \zeta(5), \dots$  と考えてゆくとどうなるのだろうか。答えを先取りしていえば、 $s$  を正の偶数とすると  $\zeta(s)$  は  $\pi$  のべきと有理数の積に書けるのである。では正の奇数での値  $\zeta(3), \zeta(5), \dots$  はどうなっているのだろうか？これらについては  $\zeta(3)$  が有理数ではないこと以外はあまり知られていないのだが、おそらく代数的に独立であろうと思われている。実はゼータ関数での値を周期積分としてとらえて、もう少し広い多重ゼータ値の一次結合で考えた方が、積について閉じたコヒーレントなカテゴリーをなす。ゼータ関数には様々な方向の一般化、類似物があるが多重ゼータ値は周期積分としてゼータ関数を考えたときの自然な一般化であるといえる。

## 2. 多重ゼータ値とその積分表示

$d \leq 1, k_1, \dots, k_d$  を正の整数で  $k_d \geq 2$  とする。このとき

**命題 2.1.** 多重級数

$$(2.1) \quad \zeta(k_1, \dots, k_d) = \sum_{0 < m_1 < m_2 < \dots < m_d} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \dots m_d^{k_d}}$$

は収束する。ここで和は  $m_1, \dots, m_d$  が  $0 < m_1 < \dots < m_d$  を満たす整数を動くものとする。

**定義 2.2** (多重ゼータ値).  $k_1, \dots, k_d$  を正の整数、 $k_d \geq 2$  とする時、 $\zeta(k_1, \dots, k_d)$  を指数  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d)$  の多重ゼータ値という。また指数  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d)$  に対して  $\text{wt}(\mathbf{k}) = k_1 + \dots + k_d$  をその重さと呼び  $\text{dep}(\mathbf{k}) = d$  を深さという。

異なる指数の多重ゼータの間には、たくさんの一次関係式、代数的関係式がある。数ある関係式の中には級数表示をもつことから得られるもの以外に、後で述べる反復積分表示から導かれるものもある。

**2.1. ザギエの予想.** 後で述べるように実はこのように多重ゼータ値で張られる  $\mathbf{Q}$  線形空間を考えると  $\mathbf{Q}$  代数になる。このように多重ゼータ値には種々の関係式が存在するが、これまで知られている有理数係数の一次の関係式はすべて重さが同じものの間の関係式である。

$$Z_0 = \mathbf{Q}, \quad Z_n = \sum_{\text{wt}(\mathbf{k})=n} \zeta(\mathbf{k})\mathbf{Q}$$

とおくと、次の予想がある。

**予想 2.3.** (1)  $Z_n$  たちは  $\mathbf{Q}$  上一次独立であろう。つまり

$$\bigoplus_{n \geq 0} Z_n \rightarrow \mathbf{R}$$

は単射だろう。

(2) 主さ  $n$  の指数の個数は  $2^{n-2}$  となるので  $\dim Z_n$  は  $\mathbf{Q}$  上の有限次元ベクトル空間である。 $\dim Z_n = d_n$  とするとき、

$$\sum_{d \geq 0} d_n t^n = \frac{1}{1 - t^2 - t^3}$$

となるであろう。

次の定理は [T1],[DG] によって示された。

**定理 2.4.**  $d_n$  を上の冪級数で定義される数とするとき

$$\dim Z_n \leq d_n$$

となる

以下この定理の証明について述べる。

2.2. **多重ゼータ値と反復積分.** ここでは多重ゼータ値の一番基本的な反復積分表示についてのべよう。 $\eta_1, \dots, \eta_n$  を  $\mathbf{C} - \{0, 1\}$  上の正則微分形式とする。

**定義 2.5.**  $a, b \in (0, 1)$  として反復積分  $\int_a^b \eta_n \eta_{n-1} \cdots \eta_1$  を次のように帰納法的に定める。

(1)  $\int_a^b \eta_1$  は通常の一変数の積分である。

(2)

$$\int_a^b \eta_n \eta_{n-1} \cdots \eta_1 = \int_a^b \left\{ \eta_n(y) \int_a^y \eta_{n-1} \cdots \eta_1 \right\}$$

1 次微分形式

$$\omega_0 = \frac{dx}{x}, \quad \omega_1 = \frac{dx}{x-1}$$

とおくと、次の定理が成り立つ。

**定理 2.6.** 極限

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} \omega_0^{k_d-1} \omega_1 \cdots \omega_0^{k_1-1} \omega_1$$

は存在して  $(-1)^d \zeta(k_1, \dots, k_d)$  と一致する。これを多重ゼータ値の積分表示という。

以下、 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon}$  の部分は極限が存在するとき単に  $\int_0^1$  と書くこととする。

### 3. 多重ゼータ値と基本群

3.1. **微分方程式とモノドロミー.** この積分表示を微分方程式的にとらえることを考える。まず反復積分はその定義から次の微分方程式を満たしている。

$$\frac{d}{dx} \int_a^x \eta_n \eta_{n-1} \cdots \eta_1 = \frac{\eta_n(x)}{dx} \int_a^x \eta_{n-1} \cdots \eta_1$$

従って  $(i_1, \dots, i_n) \in \{0, 1\}^n$  に対して、

$$\mathcal{I}(i_1, i_2, \dots, i_n; a, b) = \int_a^b \omega_{i_n} \omega_{i_{n-1}} \cdots \omega_{i_1}$$

と置くと、次が成り立つ。

$$(3.1) \quad \mathcal{I}(i_1, i_2, \dots, i_n; a, a) = 0$$

$$\frac{d}{dx} \mathcal{I}(i_1, i_2, \dots, i_n; a, x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \mathcal{I}(i_1, \dots, i_{n-1}; a, x) & (i_n = 0) \\ \frac{1}{x-1} \mathcal{I}(i_1, \dots, i_{n-1}; a, x) & (i_n = 1) \end{cases}$$

この微分方程式を  $e_0, e_1$  を変数とする非可換形式的べき級数環

$$\mathcal{A} = \mathbf{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$$

を用いて書きなおしてみよう。  $I = (i_1, \dots, i_n)$  とするとき、

$$\mathcal{I}(I; a, b) = \mathcal{I}(i_1, \dots, i_n; a, b), \quad e_I = e_{i_n} \cdots e_{i_1} \in \mathcal{A}$$

と書く。さらに形式的和を用いて

$$(3.2) \quad \Phi(a, b) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{I \in \{0,1\}^j} \mathcal{I}(I; a, b) e_I$$

とおく。ただし  $\mathcal{I}(\emptyset) = 1$  と置いた。ここで  $\mathcal{A}$  係数の 1 次微分形式  $\Omega$  を

$$\Omega(x) = \frac{dx}{x} e_0 + \frac{dx}{x-1} e_1 \in \mathcal{A} \otimes \Omega^1(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\})$$

と置くと一連の微分方程式 (3.1) は  $\mathcal{A}$  を係数とする微分方程式

$$(3.3) \quad \Phi(a, a) = 1$$

$$(3.4) \quad d\Phi(a, x) = \Omega(x)\Phi(a, x)$$

と書き換えられる。また  $\Phi(a, x)$  は  $x$  が  $(0, 1)$  の複素近傍上に正則関数に一意的に拡張され、(3.4) の方程式は  $KZ$  方程式とよばれる。非可換環  $\mathcal{A}$  の積構造を用いて反復積分

$$\int_{\gamma} \underbrace{\Omega \Omega \cdots \Omega}_{n\text{-times}} \in \mathcal{A}$$

を定義 2.5 と同様に定義すると、 $\Phi$  の定義により下の公式がなりたつ。

**命題 3.1.**  $a \in (0, 1)$  とする。

$$\exp \int_a^x \Omega = 1 + \int_a^x \Omega + \int_a^x \Omega \Omega + \int_a^x \Omega \Omega \Omega + \cdots$$

とおくと、 $\Phi(a, x) = \exp \int_0^x \Omega$  となる。

ピカールの逐次近似法によっても方程式 (3.3), (3.4) の解が上の形で与えられることがわかる。

**3.2. 解析接続とモノドロミー表現.** 従って、 $F(x) = \Phi(b, x)\Phi(a, b)$  とおくと、(3.3), (3.4) より、

$$\begin{aligned} F(b) &= \Phi(b, b)\Phi(a, b) = \Phi(a, b) \\ dF(x) &= (d\Phi(b, x))\Phi(a, b) = \Omega\Phi(b, x)\Phi(a, b) \\ &= \Omega F(x) \end{aligned}$$

となり  $F^*(x) = \Phi(a, x)$  と同じ一階線形微分方程式の初期値問題の解となっている。この微分方程式の解の一意性を用いると  $F(x) = F^*(x)$  となり、 $\Phi(b, x)\Phi(a, b) = \Phi(a, x)$  と書き直すことができる。従って  $a, b, c \in (0, 1)$  に対して、

$$\Phi(b, c)\Phi(a, b) = \Phi(a, c)$$

が成り立つ。また  $\Phi(a, x)$  は  $x$  が  $(0, 1)$  の複素近傍上に正則関数に一意的に拡張され、また  $\Omega(x)$  は  $\mathcal{A}$  に値をもつ正則微分形式なので、 $\Phi(a, x)$  は  $\mathbf{C} - \{0, 1\}$  内の  $a$  を始点とする道  $\gamma$  に沿って解析接続される。  $a$  を始点して  $b$  を終点とす

る道  $\gamma$  に沿って解析接続した結果得られる  $\mathcal{A}$  の元を  $\Phi(\gamma)$  とおく。  $\gamma_2$  を  $a$  から  $b$  に向かう道、  $\gamma_1$  を  $b$  から  $c$  に向かう道とすると、

$$\Phi(\gamma_1)\Phi(\gamma_2) = \Phi(\gamma_1\gamma_2)$$

が成り立つ。ここで  $\gamma_1\gamma_2$  は  $\gamma_2$  のあとに  $\gamma_1$  をつなげてできる道である。  $\Phi(\gamma)$  は正則関数の解析接続で得られた  $\mathcal{A}$  値関数なので道  $\gamma$  のホモトピー類のみによるので  $\Phi(\gamma)$  は基本群の元  $\gamma$  に対しても定義できることとなる。これも同じ記号を用いて  $\Phi(\gamma)$  と書く。  $\Phi(a, b)$  の定義 (3.2) により  $\Phi(a, x)$  の定数項は 1 となるので、  $e_0, e_1$  で生成される  $\mathcal{A}$  の両側イデアルを  $I$  とおくと、  $\Phi(\gamma)$  は

$$\mathcal{A}_1^\times = \{\phi \mid \phi \equiv 1 \pmod{I}\}$$

の元となる。  $\mathcal{A}$  が非可換形式的べき級数であることを考えると  $\mathcal{A}_1^\times$  は  $\mathcal{A}$  の乗法群  $\mathcal{A}^\times$  の部分群となる。従って基本群における積を上のような道の合成によって定義すると

$$(3.5) \quad \pi_1(\mathbf{C} - \{0, 1\}, a) \rightarrow \mathcal{A}_1^\times : \gamma \mapsto \Phi(\gamma)$$

は群の準同型となっている。

**3.3. ド・ラム基本群の理論.** ここで基本群の起点を十分に小さい実数  $\epsilon \in (0, 1)$  ととる。  $\mathbf{C} - \{0, 1\}$  の基本群  $\pi_1(\mathbf{C} - \{0, 1\}, \epsilon)$  は  $\epsilon$  を起点として 0 及び 1 を回るループ  $\gamma_0, \gamma_1$  で生成される階数 2 の自由群となる。準同型 (3.5) を加法的に延長することにより、  $\pi_1(\mathbf{C} - \{0, 1\}, \epsilon)$  の群環  $\mathbf{Q}\langle \pi_1(\mathbf{C} - \{0, 1\}, \epsilon) \rangle$  から  $\mathcal{A}$  の環準同型

$$(3.6) \quad \mathbf{Q}\langle \pi_1(\mathbf{C} - \{0, 1\}, \epsilon) \rangle \rightarrow \mathcal{A}$$

が得られる。  $e_0, e_1$  で生成される augmentation ideal とよばれる  $\mathcal{A}$  の両側イデアルを  $I$  とおくと、  $\pi_1(\mathbf{C} - \{0, 1\}, \epsilon)$  の元  $\gamma$  に対して  $\Phi(\gamma) \equiv 1 \pmod{I}$  となる。従って  $\gamma_0 - 1, \gamma_1 - 1$  で生成される両側イデアルを  $J = (\gamma_0 - 1, \gamma_1 - 1)$  と置くと

$$\rho(J^n) \subset I^n,$$

となる。ここでマルチェフ完備化を

$$\mathbf{Q}\langle\langle \pi_1(\mathbf{C} - \{0, 1\}, \epsilon) \rangle\rangle = \varprojlim_n \left( \mathbf{Q}\langle \pi_1(\mathbf{C} - \{0, 1\}, \epsilon) \rangle / J^n \right)$$

と定めると、環準同型

$$\mathbf{Q}\langle\langle \pi_1(\mathbf{C} - \{0, 1\}, \epsilon) \rangle\rangle \rightarrow \mathcal{A}$$

が環準同型 (3.6) から誘導される。係数の  $\mathbf{Q}$  を  $\mathbf{C}$  に変えてもまったく同様に射影極限に移行できて、

$$(3.7) \quad \mathbf{C}\langle\langle \pi_1(\mathbf{C} - \{0, 1\}, \epsilon) \rangle\rangle \rightarrow \mathcal{A}$$

が定義される。Chen のド・ラム基本群の理論を使うと次の定理が示される。

**定理 3.2** (Chen). 写像 (3.7) は同型である。

その意味で  $\mathcal{A}/I^{n+1}$  は  $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$  の基本群を冪零近似しているものであるといえる。

$\mathcal{A}$  を  $\mathbf{C} - \{0, 1\}$  のドラム基本群環という。「ド・ラム基本群」を定義するには  $\mathcal{A}$  に余積を定義する必要があるなので、それについて述べよう。

3.4. テンソル積とシャッフレル関係式.  $\mathcal{A}$  のコピー  $\mathcal{A}^\dagger = \mathbf{C}\langle\langle f_0, f_1 \rangle\rangle$  を用意する。  $e_0, e_1$  で生成される  $\mathcal{A}$  の両側イデアル  $I$  に対応する  $\mathcal{A}^\dagger$  のイデアルを  $I^\dagger$  と書く。このとき完備化テンソル積  $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A}^\dagger$  を

$$\varprojlim_n (\mathcal{A}/I^n) \otimes (\mathcal{A}^\dagger/I^{\dagger n})$$

で定義する。(3.2) で定義した  $\Phi(a, x)$  に現れる  $e_0, e_1$  を  $f_0, f_1$  で置き換えたものを  $\Phi^\dagger(a, x)$  と書く。これも  $x$  について  $(0, 1)$  の近傍で定義された  $\mathcal{A}^\dagger$  値正則関数である。このとき  $\Phi(a, x) \cdot \Phi^\dagger(a, x)$  は  $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A}^\dagger$  値正則関数でライプニッツ則、及び変数の集合  $\{e_0, e_1\}$  と変数の集合  $\{f_0, f_1\}$  が互いに交換することを用いると微分方程式

$$\begin{aligned} \Phi(a, a) \cdot \Phi^\dagger(a, a) &= 1 \\ d\left(\Phi(a, x) \cdot \Phi^\dagger(a, x)\right) &= (\Omega + \Omega^\dagger)\left(\Phi(a, x) \cdot \Phi^\dagger(a, x)\right) \\ &= \left(\frac{e_0 + f_0}{x} + \frac{e_1 + f_1}{x-1}\right)\left(\Phi(a, x) \cdot \Phi^\dagger(a, x)\right) \end{aligned}$$

を満たす。ここで  $\Omega^\dagger$  は  $\Omega$  に現れる  $e_0, e_1$  を  $f_0, f_1$  で置き換えたものである。従って常微分方程式の解の一意性により、

$$(3.8) \quad \Phi(a, x) \cdot \Phi^\dagger(a, x) = \Phi^{\dagger\dagger}(a, x)$$

が成り立つ。ここで  $\Phi^{\dagger\dagger}(a, x)$  は  $\Phi(a, x)$  に現れる  $e_0, e_1$  をそれぞれ  $e_0 + f_0, e_1 + f_1$  で置き換えた  $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A}^\dagger$  値正則関数である。

始点と終点が  $a$  となる  $\mathbf{C} - \{0, 1\}$  内の道  $\gamma$  についても式 (3.8) と同様に

$$(3.9) \quad \Phi(\gamma) \cdot \Phi^\dagger(\gamma) = \Phi^{\dagger\dagger}(\gamma)$$

が成り立つ。 $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A}^\dagger$  と  $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A}$  の同一視用いれば、

$$e_0 + f_0 = e_0 \otimes 1 + 1 \otimes e_0, \quad e_1 + f_1 = e_1 \otimes 1 + 1 \otimes e_1$$

となるので、 $\mathcal{A}$  から  $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A}$  への余積と呼ばれる環準同型を

$$\Delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A}: e_i \mapsto \Delta(e_i) = e_i \otimes 1 + 1 \otimes e_i \quad (i = 0, 1)$$

によって定義すると、等式 (3.9) から次の命題が成立することがわかる。

**命題 3.3.**  $\mathcal{A}_1^\times$  の元  $\Phi(\gamma)$  は

$$\Delta(\Phi(\gamma)) = \Phi(\gamma) \otimes \Phi(\gamma)$$

を満たす。

**定義 3.4.** (1)  $\mathcal{A}_1^\times$  の元  $g$  が群元的元であるとは

$$\Delta(g) = g \otimes g$$

をみたすことである。群元的元の集合は乘法について閉じていて、群をなす。

(2)  $\mathcal{A}_1^\times$  の群元的元を  $\mathbf{C} - \{0, 1\}$  のド・ラム基本群といい  $\pi_1^{dR}(\mathbf{C} - \{0, 1\})$  と書く。これは基点  $a$  の取り方によらない。

$g = \sum_I \zeta_I e_I$  が群元的元であるための係数の条件として次のシャッフル関係式という条件がある。 $m, n \geq 1$  として

$$\begin{aligned} \sqcup(m, n) = \{ & (\sigma, \tau) \mid \sigma : [1, m] \rightarrow [1, m+n], \tau : [1, n] \rightarrow [1, m+n], \\ & \sigma(p) < \sigma(q) \text{ for } 1 \leq p < q \leq m, \quad \tau(p) < \tau(q) \text{ for } 1 \leq p < q \leq n, \\ & \sigma([1, m]) \cap \tau([1, n]) = \emptyset \} \end{aligned}$$

とおく。 $(\sigma, \tau) \in \sqcup(m, n)$ , および  $J = (j_1, \dots, j_m) \in \{0, 1\}^m, K = (k_1, \dots, k_n) \in \{0, 1\}^n$  に対して

$$I(\sigma, \tau, J, K) = (i_1, \dots, i_{m+n}) \in \{0, 1\}^{m+n}, \quad i_{\sigma(p)} = j_p, \quad i_{\tau(q)} = k_q,$$

と定義する。

**命題 3.5** (シャッフル関係式).  $g = \sum_I \zeta_I e_I$  が群元的元であることと関係式

$$\zeta_J \zeta_K = \sum_{(\sigma, \tau) \in I(m, n)} \zeta_{I(\sigma, \tau, J, K)}$$

を満たすことは同値である。この関係式をシャッフル関係式という。

この事実と多重ゼータ値の積分表示を用いると重さ  $n$  と重さ  $m$  の多重ゼータ値の積は重さ  $n+m$  の多重ゼータの整係数一次結合に書かれることがわかる。このことから多重ゼータ値の  $\mathbf{Q}$  上の一次結合は  $\mathbf{R}$  の部分代数となることがわかる。

#### 4. ドリinfeld・アソシエータ

**4.1. 正則化とドリinfeld・アソシエータ.**  $D$  を 0 の近傍として  $D^* = D - \{0\}$  とする。 $E(x), E'(x)$  を  $I \subset \mathcal{A}$  に値を持つ  $D$  上の正則関数として  $\Omega, \Omega'$  を

$$\Omega = e_0 \cdot \frac{dx}{x} + E(x)dx, \quad \Omega' = e_0 \cdot \frac{dx}{x} + E'(x)dx$$

とおく。 $G(x)$  を  $\mathcal{A}$  に値を持つ  $D$  上の正則関数として

$$U(x) = 1 + xG(x)$$

とおき、 $U(x)$  についての次の方程式を考える。

$$(4.1) \quad dU(x) = \Omega' U(x) - U(x) \Omega$$

**命題 4.1.** 方程式を満たす  $G(x)$  は  $I$  に値をもつ  $D$  上の正則関数として一意的に存在する。

**証明.** 方程式 (4.1) を  $G(x)$  についての方程式に書き換えると、

$$\begin{aligned} d(xG(x)) = & E'(x)dx - E(x)dx \\ & + (e_0 dx + xE'(x)dx)G(x) - G(x)(e_0 dx + xE(x)dx) \end{aligned}$$

という式がなりたつ。上の等式を  $(\text{mod } I^n)$  で考えることで  $n$  による帰納法で命題を証明する。

まず、 $(\text{mod } I)$  で考えると、

$$d(xG(x)) = 0 \pmod{I}$$

となるので、 $xG(x) \pmod{I}$  は  $x$  について  $U^*$  上で定数となり、従って  $G(x) \in I$  となる。次に  $\pmod{I^2}$  で考えると、

$$d(xG(x)) = E'(x)dx - E(x)dx \pmod{I^2}$$

$$G(x) \pmod{I^2} = \frac{dx}{x} \int_0^x \left( E'(x)dx - E(x)dx \pmod{I^2} \right)$$

によって  $G \pmod{I^2}$  は  $D$  上の正則関数として定まる。 $\pmod{I^n}$  ( $n \geq 3$ ) についても同様にして  $G \pmod{I^n}$  は  $D$  上の正則関数として定まる。□

$D$  における  $\mathcal{A}_1^\times$  値正則関数  $F(x), F'(x)$  を微分方程式

$$(4.2) \quad dF(x) = \Omega F(x), \quad dF'(x) = \Omega' F'(x)$$

の解とする。

**命題 4.2.**  $\mathcal{A}_1^\times$  値関数

$$F'(x)^{-1}U(x)F(x)$$

は定数関数となる。

**証明.**  $d(F'(x)^{-1}) = -F'(x)^{-1}\Omega'$  より、

$$\begin{aligned} & d\left(F'(x)^{-1}U(x)F(x)\right) \\ &= -F'(x)^{-1}\Omega'U(x)F(x) + F'(x)^{-1}dU(x)F(x) - F'(x)^{-1}U(x)\Omega F(x) \\ &= F'(x)^{-1}\left(-\Omega'U(x) + dU(x) + U(x)\Omega\right)F(x) = 0 \end{aligned}$$

□

**命題 4.3.** (1)  $n$  を自然数、 $0 < \epsilon < 1$  をみたす実数とする。このとき任意の  $0 < u$  に対して

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^u \exp \int_\epsilon^x \underbrace{\Omega \Omega \cdots \Omega}_{n\text{-times}} = 0$$

となる。ここで極限は  $x \in (0, \epsilon)$  の間でとることであり、収束は各  $e_I$  の係数が 0 に収束するという意味である。

(2) 命題 4.2 によって得られた定数を  $C_0 = F'(x)^{-1}U(x)F(x)$  とおく。このとき

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( F'(x)^{-1}F(x) \right) = C_0$$

**証明.** (1) は反復積分の階数による帰納法で証明される。実際  $\log(x)$  の多項式の大きさを押さえられることが示される。(2) は  $U(x) = 1 + xG(x)$  で  $G(x)$  が正則関数であることと (1) からわかる。□

上の極限をとる操作を正則化という。定理 4.3 から次の定理が証明される。 $\mathcal{A}$  の元  $e$  に対して  $\epsilon^{-e}$  を

$$\epsilon^{-e} = \exp \int_1^\epsilon \frac{edx}{x}$$

と定義する。

**命題 4.4.** 極限

$$\Phi(e_0, e_1) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-e_1} \left( \exp \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} \Omega \right) \epsilon^{e_0} \in \mathcal{A}$$

が存在する。さらに上の積の3項について極限をとる前で群元的元であることから  $\Phi(e_0, e_1)$  も群元的元である。つまり

$$(4.3) \quad \nabla(\Phi(e_0, e_1)) = \Phi(e_0, e_1) \otimes \Phi(e_0, e_1)$$

を満たす。また

$$(4.4) \quad \Phi(e_1, e_0)\Phi(e_0, e_1) = 1$$

を満たす。

**定義 4.5.**  $\Phi(e_0, e_1)$  をドリinfeldt・アソシエータという。

4.2.  $M_{0,5}$  の上の可積分微分方程式. 積分表示を持つことにより得られる関係式にアソシエータ関係式がある。 $\mathbf{P}^1$  の異なる5点のモジュライ空間  $M_{0,5}$  を考える。 $\mathbf{P}^1$  の5点  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$  は  $0, s, t, 1, \infty$  と標準化することにより、 $M_{0,5}$  は  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 - \{s, t = 0, 1, \infty, s = t\}$  と同一視される。

形式的非可換べき級数の環  $\mathbf{Q}\langle\langle e_{s_0}, e_{s_1}, e_{t_0}, e_{t_1}, e_{st} \rangle\rangle$  を下の  $R_{**}$  たちで生成された両側イデアル  $I_5$  で割った環  $\mathcal{A}_5 = \mathbf{Q}\langle\langle e_{s_0}, e_{s_1}, e_{t_0}, e_{t_1}, e_{st} \rangle\rangle / I_5$  を  $M_{0,5}$  のドラム基本群環と定義する。

$$\begin{aligned} R_{st} &= [e_{s_0}, e_{t_1}], & R_{ts} &= [e_{t_0}, e_{s_1}], & R_{s0} &= [e_{s_0}, e_{t_0} + e_{st}], \\ R_{s1} &= [e_{s_1}, e_{t_1} + e_{st}], & R_{t0} &= [e_{t_0}, e_{s_0} + e_{st}], & R_{t1} &= [e_{t_1}, e_{s_1} + e_{st}] \end{aligned}$$

さらに  $\mathcal{A}_5$  には

$$\Delta : \mathcal{A}_5 \rightarrow \mathcal{A}_5 \otimes \mathcal{A}_5 : e_{kl} \mapsto \Delta(e_{kl}) = e_{kl} \otimes 1 + 1 \otimes e_{kl} \quad (k, l = 0, 1, s, t)$$

によって余積が定義される。

$$\omega_{s0} = \frac{ds}{s}, \omega_{s1} = \frac{ds}{s-1}, \omega_{t0} = \frac{dt}{t}, \omega_{t1} = \frac{dt}{t-1}, \omega_{st} = \frac{ds-dt}{s-t} \in \Omega^1(M_{0,5})$$

において、 $\mathcal{A}_5$  係数の1次微分形式  $\Omega_5$  を

$$\Omega_5 = e_{s_0}\omega_{s_0} + e_{s_1}\omega_{s_1} + e_{t_0}\omega_{t_0} + e_{t_1}\omega_{t_1} + e_{st}\omega_{st} \in \mathcal{A}_5 \otimes \Omega^1(M_{0,5})$$

と定義すると、 $\mathcal{A}_5$  に値をもつ1次の微分形式となる。 $\gamma$  を  $M_{0,5}$  の道とすると、(5.2) と同様に  $\mathcal{A}_5$  の積を用いて反復積分

$$\int_{\gamma} \underbrace{\Omega_5 \Omega_5 \cdots \Omega_5}_{n\text{-times}} \in \mathcal{A}_5 \widehat{\otimes} \mathbf{C}$$

が定義できる。

**命題 4.6.** 上の記号の下で

$$d\Omega_5 = \Omega_5 \wedge \Omega_5$$

が成り立つ。とくに  $\mathcal{A}_5$  値正則関数  $v$  に対する微分方程式

$$dv = \Omega_5 v$$

はフロベニウス可積分条件を満たす。従って  $\gamma$  を  $M_{0,5}$  の道とするとき

$$\varphi(\gamma) = \exp \int_{\gamma} \Omega_5 = 1 + \int_{\gamma} \Omega_5 + \int_{\gamma} \Omega_5 \Omega_5 + \int_{\gamma} \Omega_5 \Omega_5 \Omega_5 +$$

とおくと、これは  $\gamma$  のホモトピー類にのみよる。

**証明.** 関係式

$$\begin{aligned} \omega_{s0} \wedge \omega_{t0} + \omega_{t0} \wedge \omega_{st} + \omega_{st} \wedge \omega_{s0} &= 0, \\ \omega_{s1} \wedge \omega_{t1} + \omega_{t1} \wedge \omega_{st} + \omega_{st} \wedge \omega_{s1} &= 0 \end{aligned}$$

を用いて  $\omega_{s0}, \omega_{t0}, \omega_{st}, \omega_{s1}, \omega_{t1}$ , で生成される 2 次の外積代数は

$$\begin{aligned} \eta_{st} &= \omega_{s0} \wedge \omega_{t1}, \eta_{ts} = \omega_{t0} \wedge \omega_{s1}, \\ \eta_{s0} &= \omega_{s0} \wedge \omega_{st}, \eta_{s1} = \omega_{s1} \wedge \omega_{st}, \eta_{t0} = \omega_{t0} \wedge \omega_{st}, \eta_{t1} = \omega_{t1} \wedge \omega_{st} \end{aligned}$$

で生成される。そこで

$$\Omega_5 \wedge \Omega_5 = R_{st} \eta_{st} + R_{ts} \eta_{ts} + R_{s0} \eta_{s0} + R_{s1} \eta_{s1} + R_{t0} \eta_{t0} + R_{t1} \eta_{t1}$$

となる。イデアル  $I_5$  の定義より  $\Omega_5 \wedge \Omega_5 = 0 \in \mathcal{A}_5 \otimes \Omega^2(M_{0,5})$  となる。  $\square$

いま  $a, b \in M_{0,5}$  とするとき  $a$  で始まり  $b$  で終る道のホモトピー類を  $\pi_1(M_{0,5}, a, b)$  と書くことにすると、 $\varphi$  は  $\pi_1(M_{0,5}, a, b) \rightarrow \mathcal{A}_5$  なる写像を定義する。

**命題 4.7.** 写像  $\varphi$  は乗法的である。つまり道  $\gamma_1$  と  $\gamma_2$  が合成可能であれば  $\varphi(\gamma_1 \gamma_2) = \varphi(\gamma_1) \varphi(\gamma_2)$  である。また  $\varphi(\gamma)$  の元は群的である。つまり

$$\Delta(\varphi(\gamma)) = \varphi(\gamma) \otimes \varphi(\gamma)$$

が成り立つ。

**4.3. 安定コンパクト化とアソシエータ関係式.**  $M_{0,5}$  のコンパクト化として  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$  を  $(0, 0), (1, 1), (\infty, \infty)$  で爆発させた多様体を考える。下の図は上の 3 点を爆発させたときの例外曲線  $E_0, E_1, E_\infty$  と  $s = 0, 1, \infty, t = 0, 1, \infty$ , の固有逆像  $L_{s,0}, L_{s,1}, L_{s,\infty}, L_{t,0}, L_{t,1}, L_{t,\infty}$  は図で与えられる。

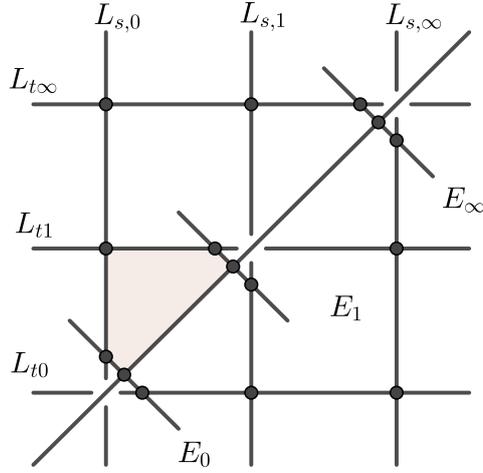


FIGURE 1.  $\mathcal{M}_{0,5}$  のコンパクト化

それぞれの因子における  $\Omega_5$  の  $\mathcal{A}_5$  に値を持つ留数は下の表のようになる。

TABLE 1. 各因子に置ける留数

因子	$L_{s0}$	$L_{s1}$	$L_{s\infty}$	$L_{t0}$	$L_{t1}$	$L_{t\infty}$	$E_0$	$E_1$	$E_\infty$
留数	$e_{s0}$	$e_{s1}$	$e_{s\infty}$	$e_{t0}$	$e_{t1}$	$e_{t\infty}$	$f_0$	$f_1$	$f_\infty$

ただし  $e_{x\infty}, e_{y\infty}, f_0, f_1, f_\infty$  は

$$e_{x0} + e_{x1} + e_{x\infty} + e_{xy} = 0, \quad e_{y0} + e_{y1} + e_{y\infty} + e_{xy} = 0,$$

$$f_0 = e_{x0} + e_{y0} + e_{xy}, \quad f_1 = e_{x1} + e_{y1} + e_{xy}, \quad f_\infty = e_{x\infty} + e_{y\infty} + e_{xy}$$

によって定まるものとする。  $e_{t0}$  と  $e_{s0} + e_{t0} + e_{st}$  などが可換であることから正則化をおこなう事ができる。図に影をつけた部分が可縮であること及び正則化を考えて、

$$(4.5) \quad \Phi(f_1, e_{x0})\Phi(e_{xy}, e_{y1})\Phi(f_0, f_1)\Phi(e_{x0}, e_{xy})\Phi(e_{y1}, f_0) = 1$$

という関係式がえられる。このようにして得られた関係式は5項関係式とよばれる。また、  $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$  の中で下半平面が可縮であることと、再び正則化を用いて、

$$(4.6) \quad \exp(e_0\pi i)\Phi(e_\infty, e_0)\exp(e_\infty\pi i)\Phi(e_1, e_\infty)\exp(e_1\pi i)\Phi(e_0, e_1) = 1$$

という関係式が得られる。これまでのことを総合して  $\Phi(e_0, e_1)$  は次の命題の関係式を満たす事がわかる。

**命題 4.8.** ドリinfeldt・アソシエータ  $\Phi(e_0, e_1)$  は次の関係式を満たす。

- (1) 群的关系:(4.3)

(2) 双対関係式:(4.4)

(3) 5項関係式:(4.5)

(4) 6項関係式:(4.6)

これらの関係をまとめてアソシエータ関係式という。

## 5. 混合ホッジ構造と基本群

5.1. 有理基本群とド・ラム・コホモロジー、特異コホモロジー.  $a, b \in \mathbf{R}$  が  $0 < a < b < 1$  とする。  $n$  次単体  $\Delta_n$  を

$$\Delta_n = \{(t_1, \dots, t_n) \mid 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1\}$$

とおき、  $\gamma$  を  $a$  を始点、  $b$  を終点とする  $t \in [0, 1]$  によってパラメータ付けされた道とする。さらに  $(t_1, \dots, t_n) \in \Delta_n$  によってパラメータ付けされた  $n$  単体  $\Delta_n[\gamma]$  を

$$(5.1) \quad \Delta_n[\gamma] : \Delta_n \rightarrow X^n : (t_1, \dots, t_n) \mapsto (\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n))$$

によって定義する。このとき、反復積分  $\int_{\gamma} \omega_n \cdots \omega_2 \omega_1$  は

$$(5.2) \quad \int_{\gamma} \omega_n \cdots \omega_2 \omega_1 = \int_{\Delta_n[\gamma]} \omega_n(t_n) \wedge \cdots \wedge \omega_1(t_1)$$

と表される。ここで、  $i$  番目の射影を  $p_i : X^n \rightarrow X$  として  $p_i^* \omega = \omega(t_i)$  とおいた。この積分表示を用いると反復積分は  $(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\})^n$  上の相対コホモロジーと相対ホモロジーのペアリングとして解釈できることを見てみよう。

そのために多様体の列  $X_n$  とその上の因子  $D_0, \dots, D_n, E_n, F_n$  を定義する。

$$X_n = \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}\}$$

$$D_0 = \{(t_1, \dots, t_n) \in X_n \mid a = t_1\}, \quad D_i = \{(t_1, \dots, t_n) \in X_n \mid t_i = t_{i+1}\}$$

$$D_n = \{(t_1, \dots, t_n) \in X_n \mid t_n = b\},$$

$$E_n = E_{n,a,b} = D_0 \cup D_1 \cup \cdots \cup D_{n-1} \cup D_n, \quad F_n = F_{n,a} = D_0 \cup D_1 \cup \cdots \cup D_{n-1}$$

と定義する。このとき上の座標付けをもちいて  $D_n \simeq X_n$  という同一視を行ったとき、  $D_n \cap (D_0 \cup \cdots \cup D_{n-1})$  は  $E_{n-1}$  と同一視される。

ド・ラム・コホモロジーを考えると、次の相対コホモロジーの完全列がえられる。

$$(5.3) \quad 0 \rightarrow H_{dR}^{n-1}(X_{n-1}, E_{n-1}) \xrightarrow{\iota_{n-1}} H_{dR}^n(X_n, E_n) \rightarrow H_{dR}^n(X_n, F_n) \rightarrow 0$$

また、

$$H_{dR}^n(X_n, F_n) = H_{dR}^1(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\})^{\otimes n} = \left( \frac{dx}{x} \mathbf{Q} \oplus \frac{dx}{x-1} \mathbf{Q} \right)^{\otimes n}$$

がわかるので、単射  $\iota_{n-1}$  の列を考えることにより  $H^n(X_n, E_n)$  には  $W_i = H^i(X_i, E_i)$  により増大フィルトレーション  $\{W_i\}$  が導かれる。また  $\{W_i\}$  に伴う次数加群は

$$W_k/W_{k-1} = \left( \frac{dx}{x} \mathbf{Q} \oplus \frac{dx}{x-1} \mathbf{Q} \right)^{\otimes k}$$

となる。これはバー複体の記号を用いて  $[\omega_{i_1} | \cdots | \omega_{i_k}]$  ( $(i_1, \dots, i_k) \in \{0, 1\}$ ) で生成される。従って、帰納極限について

$$\varinjlim_n H_{dR}^n(X_n, E_n) \simeq \mathbf{Q} \left\langle \frac{dx}{x}, \frac{dx}{x-1} \right\rangle$$

がえられる。

特異コホモロジーについても (5.3) と同様の完全列があり、

$$H_B^{n-1}(X_{n-1}, E_{n-1}) \xrightarrow{\iota_{n-1}} H_B^n(X_n, E_n)$$

により帰納系  $\{H_n^B(X_n, E_n)\}$  が定まる。その帰納極限によりホップ代数  $\mathcal{H}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{C} - \{0, 1\}, a, b)$  を

$$\mathcal{H}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{C} - \{0, 1\}, a, b) = \varinjlim_n H_B^n(X_n, E_n)$$

が定義される。相対特異コホモロジーと相対特異ホモロジーに関する双対性と相対特異ホモロジーと相対ド・ラムコホモロジーの間の積分によるペアリングが完全であることによりド・ラム同型写像

$$(5.4) \quad H_{dR}^n(X_n, E_n) \otimes \mathbf{C} \xrightarrow[\simeq]{\text{cp}} H_B^n(X_n, E_n) \otimes \mathbf{C}$$

が得られる。この同型は比較同型という。

相対特異ホモロジーに対しても、完全列

$$0 \rightarrow H_n^B(X_n, F_n) \rightarrow H_n^B(X_n, E_n) \xrightarrow{\iota_n^*} H_{n-1}^B(X_{n-1}, E_{n-1}) \rightarrow 0$$

が得られる。 $\gamma$  を  $a$  を始点、 $b$  を終点とする道とすると、(5.1) で定義した  $\Delta_n[\gamma]$  は  $H_n^B(X_n, E_n)$  の元  $[\Delta_n[\gamma]]$  を定めるので  $\gamma \in \pi_1(\mathbf{C} - \{0, 1\}, a, b)$  に対して  $[\Delta_n[\gamma]]$  を対応させることにより

$$\mathbf{Q} \langle \langle \pi_1(\mathbf{C} - \{0, 1\}, a, b) \rangle \rangle / I^{n+1} \xrightarrow{\simeq} H_n^B(X_n, E_n)$$

という同型がえられ

$$\varinjlim_n H_n^B(X_n, E_n) \simeq \mathbf{Q} \langle \langle \pi_1(\mathbf{C} - \{0, 1\}, \epsilon) \rangle \rangle$$

という同型が得られる。ここで  $I^{n+1}$  は対蹠イデアル (augmentation ideal) とよばれるものである。つまり、 $H_n^B(X_n; E_n, \mathbf{Q})$  は  $\mathbf{C} - \{0, 1\}$  の基本群環を冪零近似しているものであるといえる。 $\iota_n^*$  の双対である

$$H_B^{n-1}(X_{n-1}, E_{n-1}) \xrightarrow{\iota_n^B} H_B^n(X_n, E_n)$$

により帰納系  $\{H_n^B(X_n, E_n)\}$  が得られ、その帰納極限

$$\mathcal{H}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{C} - \{0, 1\}, a, b) = \varinjlim_n H_B^n(X_n, E_n)$$

を基本ホップ代数という。

$\gamma$  を道とする。1 に対して  $[\Delta_n[\gamma]]$  を対応させる道写像  $P_\gamma : \mathbf{Q} \rightarrow H_n^B(X_n, E_n)$  の双対  $p_\gamma^* : H_B^n(X_n, E_n) \xrightarrow{p_\gamma^*} \mathbf{Q}$  を余道写像という。余道写像は帰納系  $\{H_n^B(X_n, E_n)\}$  について協調的であるので帰納極限  $\mathcal{H}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{C} - \{0, 1\}, a, b)$  から  $\mathbf{Q}$  への線形写像

$$p_\gamma^* : \mathcal{H}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{C} - \{0, 1\}, a, b) \rightarrow \mathbf{Q}$$

が定まる。この写像も余道写像という。

5.2. **混合テイト・ホッジ構造とホップ代数.** 混合ホッジ構造について述べよう。 $K$  を  $\mathbf{C}$  の部分体とする。 $K$ -混合ホッジ構造とは  $(V_B, V_{dR}, \text{cp})$  という3つ組がデータとして与えられていて下の条件を満たすものである。

- (1)  $V_B$  は (特異コホモロジーから来る) 有限次元  $\mathbf{Q}$  ベクトル空間でベッチ部分と呼ばれる。ここには重さフィルトレーション  $\{W_i(V_B)\}$  という増大フィルトレーションが入っている。
- (2)  $V_{dR}$  は (ド・ラム・コホモロジーから来る) 有限次元  $K$  ベクトル空間でド・ラム部分と呼ばれる。ここには重さフィルトレーション  $\{W_i(V_{dR})\}$  と呼ばれる増大フィルトレーションとホッジ・フィルトレーション  $F^p$  という減少フィルトレーションの二つのフィルトレーションが入っている。
- (3)  $\text{cp}$  は  $V_B \otimes \mathbf{C}$  と  $V_{dR} \otimes \mathbf{C}$  の同型で重さフィルトレーションについて協調的である。
- (4) さらに重さフィルトレーション  $\{W_i(V)\}$  に伴う次数加群  $Gr_i^W(V) = W_i(V)/W_{i-1}(V)$  はホッジ構造を定める。

以下で用いられるのは混合ホッジ構造の中でも以下に述べる特殊な混合テイト・ホッジ構造である。混合テイト・ホッジ構造とは重さフィルトレーションに伴う次数加群  $Gr_i^W(V)$  が

$$Gr_i^W(V) = \begin{cases} V_{i/2} \otimes \mathbf{Q}(i/2) & (\text{if } i = \text{even}) \\ 0 & (\text{if } i = \text{odd}) \end{cases}$$

となるものである。ここで  $\mathbf{Q}(k)$  はテイト・ホッジ構造と呼ばれるもので、

$$\mathbf{Q}(k) = (\mathbf{Q}(k)_B, K(k)_{dR}, \text{cp}) = ((2\pi i)^k \mathbf{Q}, K, \text{cp})$$

なる三つ組で定まるホッジ構造である。比較写像  $\text{cp}$  は  $(2\pi i)^k \mathbf{Q}$  と  $K$  の自然な  $\mathbf{C}$  への埋め込みから決まる自然な同型である。三つ組  $(H_{dR}^n(X_n, E_n), H_B^n(X_n, E_n), \text{cp})$  は比較同型 (5.4) により混合テイト・ホッジ構造となることが容易に示せる。

実は混合テイト・ホッジ構造全体の圏は淡中圏となっておりさらに代数的な扱いができる。淡中圏とは直和、双対、テンソル積について閉じていて、良い性質をもっているアーベル圏  $\mathcal{C}$  でその代表的なものが体  $K$  上のベクトル空間のなす圏である。淡中の基本定理によれば、体  $K$  上のベクトル空間の圏へのよい関手  $\omega$  (ファイバー関手と呼ばれる) を定めることにより、淡中圏はある代数群の表現の圏と圏同値になっている。この代数群は淡中基本群と呼ばれ  $\pi_1(\mathcal{C}, \omega)$  と書かれる。代数群  $G$  の表現の圏は  $G$  の座標環  $\mathcal{O}_G$  を考えれば、右  $\mathcal{O}_G$  余加群の圏と同値となる。代数群の座標環には代数群の積の構造や単位元の存在からくる構造が備わっており、その構造によってホップ代数となる。単位元への制限写像に対応するのが余単位元 (counit)

$$\mathcal{O}_G \xrightarrow{ev_\omega} k$$

である。従って淡中圏は  $\mathcal{H}_{\mathcal{C}} = \mathcal{O}_{\pi_1(\mathcal{C}, \omega)}$  の右余加群の圏と同値になる。

混合テイト・ホッジ構造はベッチ部分、あるいはド・ラム部分をとる関手はファイバー関手となる。これらのファイバー関数手に対する淡中基本群の構成法について述べる。

**定義 5.1** (ドゥリーニュ代数). (1) 3つの代数  $A_B, A_{dR}, A_{an}$  を

$$A_B = \bigoplus_{k \geq 0} \mathbf{Q}(k), \quad A_{dR} = K, \quad A_{an} = K \oplus \bigoplus_{k > 0} \mathbf{C}(k)$$

と定義する。また環準同型

$$\iota_B : A_B \rightarrow A_{an}, \quad \iota_{dR} : A_{dR} \rightarrow A_{an}$$

を自然な単射として定義する。

(2) 微分次数環  $A_{\mathcal{D}} = A_{\mathcal{D}}^{\dagger}$  を

$$A_{\mathcal{D}}^0 = A_B \oplus A_{dR}, \quad A_{\mathcal{D}}^1 = A_{an}$$

と定義する。以後  $A_{\mathcal{D}}$  の元は  $a = (a_B, a_{an}, a_{dR})$  と表す。 $A_{\mathcal{D}}$  における微分  $d_{\mathcal{D}}$  を

$$d_{\mathcal{D}} : A_{\mathcal{D}} \ni (a_B, a_{an}, a_{dR}) \mapsto (0, \iota_B(a_B) - \iota_{dR}(a_{dR}), 0) \in A_{\mathcal{D}}$$

と定義する。以後  $\iota_B(a_B), \iota_{dR}(a_{dR})$  は混乱のない限り単に  $a_B, a_{dR}$  などと表す。積は

$$(a_B, a_{an}, a_{dR}) \cdot (b_B, b_{an}, b_{dR}) = (a_B b_B, a_{an} b_B + a_{dR} b_{an}, a_{dR} b_{dR})$$

と定義する。このとき

$$d_{\mathcal{D}}(a \cdot b) = d_{\mathcal{D}}(a) \cdot b + (-1)^{|a|} a \cdot d_{\mathcal{D}}(b)$$

が成立して微分次数代数となる。

$K = \mathbf{Q}$  の場合を考えると  $\mathbf{Q}(0)$  への射影  $\epsilon_B : A_B \rightarrow \mathbf{Q}$  及び自然な同型  $\epsilon_{dR} : A_{dR} \rightarrow K = \mathbf{Q}$  は環準同型を与え、それぞれベッチ (ド・ラム) 添加写像 (augmentation) と呼ばれる。また  $\mathcal{O} = \mathbf{Q}[x, 1/x]$  とおく。 $\epsilon_1, \epsilon_2$  を  $\epsilon_B$  または  $\epsilon_{dR}$  のいずれかとして、加群

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \text{Bar}(A)_{\epsilon_2} = & (\mathcal{O} \otimes \mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q}) \oplus (\mathcal{O} \otimes \mathbf{Q} \otimes A \otimes \mathbf{Q}) \oplus (\mathcal{O} \otimes \mathbf{Q} \otimes A \otimes A \otimes \mathbf{Q}) \\ & \oplus (\mathcal{O} \otimes \mathbf{Q} \otimes A \otimes A \otimes A \otimes \mathbf{Q}) \oplus \cdots \end{aligned}$$

とその上の微分  $d_B$  が

$$\begin{aligned} d_I(f(x) \cdot a_1 \otimes \cdots \otimes a_k) &= f(x) \cdot \left[ da_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_k \pm \cdots \pm a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes da_k \right], \\ d_O(f(x) \cdot a_1 \otimes \cdots \otimes a_k) &= f(x) \cdot \left[ \epsilon_1(a_1) a_2 \otimes \cdots \otimes a_k \pm (a_1 a_2) \otimes \cdots \otimes a_k \right. \\ & \quad \left. \pm a_1 \otimes \cdots \otimes (a_{k-1} a_k) \pm a_1 \otimes \cdots \otimes a_{k-1} \epsilon_2(a_k) \right], \\ d_B &= d_I + d_O \end{aligned}$$

として定義される。ここで符号は自然な仕方で定まるのだが、少し複雑なので略した。 $\epsilon_1 \text{Bar}(A)_{\epsilon_2}$  をバー複体という。 $* \text{Bar}(A)_{*}$  には余積

$$\epsilon_1 \text{Bar}(A)_{\epsilon_3} \rightarrow \epsilon_1 \text{Bar}(A)_{\epsilon_2} \otimes \epsilon_2 \text{Bar}(A)_{\epsilon_3}$$

が定義され、従ってそのコホモロジー  $* \mathcal{H}_{*} = H^0(* \text{Bar}(A)_{*})$  にも余積

$$\Delta : \epsilon_1 \mathcal{H}_{\epsilon_3} \rightarrow \epsilon_1 \mathcal{H}_{\epsilon_2} \otimes \epsilon_2 \mathcal{H}_{\epsilon_3}$$

及び対蹠写像 (antipodal) が定義される。さらに  $\epsilon_2 = \epsilon_1$  のときは、余単位写像 (counit)  $u : {}_{\epsilon_1}\mathcal{H}_{\epsilon_1} \rightarrow \mathbf{Q}$  が定義される。もし  $A$  が次数可換な微分次数環であれば、 ${}_{\epsilon_1}\mathcal{H}_{\epsilon_2}$  にはシャッフル積という積の構造もはいる。いまの場合は  $A$  の積は次数可換にはならないが、少し工夫をすることにより  ${}_{\epsilon_1}\mathcal{H}_{\epsilon_2}$  にはシャッフル積が定義される。それによって  ${}_{\epsilon}\mathcal{H}_{\epsilon}$  はアダムズ次数付きホップ代数となる。

$V$  をベクトル空間とすると、 $V$  上の右余加群の構造とは、準同型  $\Delta_V : V \rightarrow V \otimes \mathcal{H}$  であって以下の性質をみたすものである。

- (1) (余結合性)  $V \rightarrow V \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$  の準同型として

$$(\text{id}_V \otimes \Delta_{\mathcal{H}}) \circ \Delta_V = (\Delta_V \otimes \text{id}_{\mathcal{H}}) \circ \Delta_V$$

が成り立つ。

- (2) (余ユニタリ性)  $V \rightarrow V$  として

$$(\text{id}_V \otimes u) \circ \Delta_V = \text{id}_V$$

が成り立つ

次の定理が成り立つ。

**定理 5.2.**  $K = \mathbf{Q}$  上の混合テイト・ホッジ構造  $(H_B, H_{dR}, \text{cp})$  に対してそのベッチ部分  $H_B$  (ド・ラム部分) を対応することによって得られるファイバー関手  $\omega_B$  ( $\omega_{dR}$ ) に対する淡中基本群のホップ代数は  ${}_B\mathcal{H}(A_{\mathcal{D}})_B$  ( ${}_{dR}\mathcal{H}(A_{\mathcal{D}})_{dR}$ ) と同型になる。つまり、 ${}_B\mathcal{H}(A_{\mathcal{D}})_B$  ( ${}_{dR}\mathcal{H}(A_{\mathcal{D}})_{dR}$ ) 上の右余加群の圏と  $\mathbf{Q}$  上の混合テイト・ホッジ構造の圏は圏同値である。

上の定理により  ${}_B\mathcal{H}(A_{\mathcal{D}})_B$  は余積により  ${}_B\mathcal{H}(A_{\mathcal{D}})_B$ -右余加群と見ることができるので、これに対応する混合テイト・ホッジ構造を  ${}_B\mathcal{H}(A_{\mathcal{D}})_{H_g}$  と書くことにすると、そのベッチ・ファイバー関手の定義から

$$\omega_B({}_B\mathcal{H}(A_{\mathcal{D}})_{H_g}) = {}_B\mathcal{H}(A_{\mathcal{D}})_B$$

となる。また  ${}_B\mathcal{H}(A_{\mathcal{D}})_{H_g}$  についての比較同型と  ${}_B\mathcal{H}(A_{\mathcal{D}})_B$  の余単位限を用いて

$$(5.5) \quad \omega_{dR}({}_B\mathcal{H}(A_{\mathcal{D}})_{H_g}) \otimes \mathbf{C} \xrightarrow{\sim} \omega_B({}_B\mathcal{H}(A_{\mathcal{D}})_{H_g}) \otimes \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$$

なる  $\mathbf{C}$ -線形写像が得られる。 $\omega_{dR}({}_B\mathcal{H}(A_{\mathcal{D}})_{H_g}) = {}_B\mathcal{H}(A_{\mathcal{D}})_{dR}$  であることを用いると、(5.5) で得られる合成写像

$$\text{cp}^* : {}_B\mathcal{H}(A_{\mathcal{D}})_{dR} \otimes \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$$

を比較余道という。

**命題 5.3.**  $M = (M_B, M_{dR}, \text{cp}_M)$  を混合テイト・ホッジ構造とする。このとき余作用  ${}_{dR}\Delta_B : M_{dR} \rightarrow M_B \otimes {}_B\mathcal{H}_{dR}$  が定義される。余作用  ${}_B\Delta_{dR}$  と比較余道との合成

$$M_{dR} \rightarrow M_B \otimes {}_B\mathcal{H}_{dR} \xrightarrow{\text{id}_{M_B} \otimes \text{cp}^*} M_B \otimes \mathbf{C}$$

は比較写像と

$$M_{dR} \rightarrow M_{dR} \otimes \mathbf{C} \xrightarrow{\sim} M_B \otimes \mathbf{C}$$

一致する。

5.3. **基本群の混合ホッジ理論.** 節で述べた比較同型 (5.4) を考えると、

$$(5.6) \quad (H_B^n(X_n; E_n, \mathbf{Q}), H_{dR}^n(X_n; E_n), \text{cp})$$

には混合ホッジ構造が入る。\$a\$ と \$b\$ を結ぶ道 \$\gamma\$ を固定すると、比較写像と \$\gamma\$ から誘導される余道写像 \$p\_\gamma^\*\$ の合成

$$(5.7) \quad H_{dR}^n(X_n; E_n) \xrightarrow{\text{cp}} H_B^n(X_n; E_n, \mathbf{Q}) \otimes \mathbf{C} \xrightarrow{p_\gamma^*} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{C}$$

を考えると、\$\omega\_1, \dots, \omega\_n \in \{dx/x, dx/(x-1)\}\$ の反復積分は

$$\int_\gamma \omega_n \cdots \omega_1 = p_\gamma^* \circ \text{cp}([\omega_n \mid \cdots \mid \omega_1])$$

によって与えられる。混合テイト・ホッジ構造 (5.6) に対して命題 5.3 を用いると、下の図式を得る。

$$(5.8) \quad \begin{array}{ccc} H_{dR}^n(X_n; E_n) & \xrightarrow{dR\Delta_B} & H_B^n(X_n; E_n, \mathbf{Q}) \otimes {}_B\mathcal{H}(A_{\mathcal{D}})_{dR} \\ \simeq \downarrow & & \downarrow p_\gamma^* \times \text{id} \\ \mathbf{C}\langle \frac{dx}{x}, \frac{dx}{x-1} \rangle / I^{n+1} & \longrightarrow & \mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q} \otimes {}_B\mathcal{H}(A_{\mathcal{D}})_{dR} \\ & \searrow \varphi & \downarrow \text{id} \times \text{cp}^* \\ & & \mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q} \otimes \mathbf{C} \end{array}$$

この図式において、

$$\varphi(\omega_n \cdots \omega_1) = \int_\gamma \omega_n \cdots \omega_1$$

この図式において \$\gamma = [\epsilon, 1 - \epsilon]\$ としたときの \$\epsilon \to 0\$ のときの極限を考えると多重ゼータ値がでてくることをここでは注意しておこう。

## 6. 混合テイト・モチーフ

6.1. **モチーフの圏、ホップ代数.** 上の図式は多重ゼータ値の次元を考える上で役に立ちそうだが、難点は \${}\_B\mathcal{H}(A\_{\mathcal{D}})\_B\$ は巨大なホップ代数なのでもっとギリギリ小さいホップ代数が欲しい。それを可能にするのが高次チャウ群の考え方を応用した混合テイト・モチーフである。ブロックの高次サイクル群には積構造が入っていて微分次数環となるが、これをバー構成法に適用することによりホップ代数 \${}\_B\mathcal{H}(MTM/\mathbf{Q})\_B\$ が構成される。基礎体を \$\mathbf{Q}\$ とする混合テイト・モチーフはこのホップ代数上の余加群として定義される。混合テイト・モチーフは基礎体が代数体の場合には計算されていてよくわかっている。ホップ代数を定義する際、混合テイト・ホッジ構造と同様にベッチ・ファイバー関手、ド・ラム・ファイバー関手の二つのファイバー関手が定義されている。また多様体の基礎体 \$K\$ が \$\mathbf{Q}\$ の時にはド・ラム・ファイバー関手も \$\mathbf{Q}\$ 上のベクトル空間の圏への関手となる。

以上まとめて、下のような性質をもつ混合テイト・モチーフの圏が淡中圏として構成される。

- (1) 混合テイト・モチーフにはベッチ・ファイバー関手  $\omega_B$  およびド・ラム・ファイバー関手  $\omega_{dR}$  が  $\mathbf{Q}$  ベクトル空間への関手として定義されている。
- (2) それぞれのファイバー関手に応じてホップ代数  ${}_B\mathcal{H}(MTM/\mathbf{Q})_B$ ,  ${}_{dR}\mathcal{H}(MTM/\mathbf{Q})_{dR}$  が定義される。さらにその二つのファイバー関手を結ぶホップ余加群  ${}_B\mathcal{H}(MTM/\mathbf{Q})_{dR}$  が存在する。
- (3) 二つのファイバー関手の間の比較同型は  ${}_B\mathcal{H}(MTM/\mathbf{Q})_{dR} \xrightarrow{\text{cp}^*} \mathbf{C}$  という評価写像により与えられる。
- (4)  ${}_B\mathcal{H}(MTM/\mathbf{Q})_{dR}$  はブロックの高次チャウ群により計算される。

$a, b \in \mathbf{Q}$  が  $0, 1$  と異なるとき、 $H_M^n(X_n; E_n)$  という混合テイト・モチーフが存在して、そのベッチ・ファイバー関手、ド・ラム・ファイバー関手がそれぞれ  $H_B^n(X_n; E_n)$ ,  $H_{dR}^n(X_n; E_n)$  と一致するものが構成できるのである。また、比較同型も前節の比較同型と一致する。さらに  $a$  と  $b$  を結ぶ道  $\gamma$  を一つ決めると、混合テイト・ホッジ構造のときと同様に下の図式をえる。

$$(6.1) \quad \begin{array}{ccc} H_{dR}^n(X_n; E_n) & \longrightarrow & H_B^n(X_n; E_n, \mathbf{Q}) \otimes {}_B\mathcal{H}(MTM/\mathbf{Q})_{dR} \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \text{ev}_\gamma \times \text{id} \\ \mathbf{Q}\langle \frac{dx}{x}, \frac{dx}{x-1} \rangle_{\leq n} & \longrightarrow & \mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q} \otimes {}_B\mathcal{H}(MTM/\mathbf{Q})_{dR} \\ & \searrow \varphi_M & \downarrow \text{id} \times \text{cp}^* \\ & & \mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q} \otimes \mathbf{C} \end{array}$$

さらに  $\varphi_M$  ついても

$$\varphi_M(\omega_n \dots \omega_1) = \int_\gamma \omega_n \dots \omega_1$$

がなりたつ。従って  $n$  を固定したときに  $\omega_1 \dots \omega_n$  を動かして  $\varphi_M(\omega_n \dots \omega_1)$  の形の複素数で生成される  $\mathbf{C}$  の部分空間は  ${}_B\mathcal{H}(MTM)_{dR}^n \rightarrow \mathbf{C}$  の像で生成される。

**6.2. 定理 2.4 の証明.** 多重ゼータ値の次元の評価 (定理 2.4) の証明に図式 (6.1) を用いようとするとき、以下のような修正が必要である。

- (1)  $\mathbf{C} - \{0, 1\}$  の基本群の始点が  $a$  が  $0$  に行くときの極限に変更し、終点が  $b$  が  $1$  に行くときの極限に変更しなければならない。これについては

$$H_{dR}^n(X_n; E_n) = \mathbf{Q}\langle \frac{dx}{x}, \frac{dx}{x-1} \rangle_{\leq n}$$

全体で構成する必要はなく、

$$\frac{dx}{x} \left[ \mathbf{Q}\langle \frac{dx}{x}, \frac{dx}{x-1} \rangle_{\leq n-2} \right] \frac{dx}{x-1}$$

という部分空間に対応する部分に対して構成すればよい。ドゥリーニュ・ゴンチャロフの論文では  $\mathbf{Q}\langle \frac{dx}{x}, \frac{dx}{x-1} \rangle_{\leq n}$  全体に対応するモチーフがテクニカルな方法で構成されているが、それがどのような多様体 (の組

み合わせ) から作られているのか、一目でわかる形ではない。ブローアップなどの操作によってどのようにしてドゥリーニュ・ゴンチャロフ構成法が得られるかは今後の研究課題である。

- (2) 図式に現れる  $B\mathcal{H}(MTM/\mathbf{Q})_{dR}$  は  $\mathbf{Z}$  上のモチーフのホップ代数「正で実の部分」  $B\mathcal{H}(MTM/\mathbf{Z})_{dR}^+$  で置き換えなければならない。  $B\mathcal{H}(MTM/\mathbf{Z})_{dR}^+$  は

$$(6.2) \quad \mathbf{Q}[c_2] \langle c_3, c_5, c_7, \dots \rangle$$

で  $\mathbf{Q}[c_2]$  上  $c_3, c_5, c_7, \dots$  で生成される非可換自由代数である。

このような修正が必要である理由を簡単にのべる。

(1) の修正については、極限として定義されている周期が実際の多様体の周期として得られていることを示すことが必要である。そのために  $X_n$  を  $a \rightarrow 0, b \rightarrow 1$  の極限操作で出てくる多様体を構成することが必要である。そのためには  $X_n$  という多様体の極限にあたる多様体を爆発を用いて構成すれば十分である。具体的な構成法については [T1] において示されている。

(2) の修正について述べよう。  $B\mathcal{H}(MTM/\mathbf{Q})_{dR}$  の環としての構造は

$$(6.3) \quad \mathbf{Q}[c_1, c_1^{-1}] \langle g_p, c_3, c_5, c_7, \dots \rangle_{p: \text{素数}}$$

となっている。ここで  $c_1$  は可換な変数で、  $\mathbf{Q}[c_1]$  上、素数で添え字付けされた非可換変数  $g_p$  及び  $c_3, c_5, c_7, \dots$  を生成元とする、自由代数である。さらにここには複素共役が作用していて、  $\bar{c}_1 = -c_1$  となっており、そのほかの生成元は複素共役に関して不変である。実際に多重ゼータ値は「 $\mathbf{Z}$  上の多様体」の周期として現れるので、余作用は上の環の部分環

$$(6.4) \quad \mathbf{Q}[c_1, c_1^{-1}] \langle c_3, c_5, c_7, \dots \rangle$$

に値をもつ。さらに多重ゼータ値はすべて実数なので、  $c_2 = c_1^2$  と置くと、その部分環

$$(6.5) \quad \mathbf{Q}[c_2, c_2^{-1}] \langle c_3, c_5, c_7, \dots \rangle$$

に値をもつ。さらに  $\mathbf{Z}$  上のモチーフとして構成された  $H_M^n(X_n; E_n)$  はコホモロジー的なので、その余作用は、(6.2) に値をもつ。さらに  $c_2, c_3, c_5, c_7, \dots$  の次数を  $2, 3, 5, 7, \dots$  となる次数を導入することができて、  $B\mathcal{H}(MTM/\mathbf{Z})_{dR}^+$  に入る次数と多重ゼータ値の重さは協調的である。(6.2) の生成多項式は

$$\frac{1}{1-t^2} \cdot \frac{1}{1-t^3-t^5-t^7 \dots} = \frac{1}{1-t^2-t^3}$$

となるので、定理 2.4 はこの可換図式の帰結である。

## 7. 重さフィルトレーションと混合楕円モチーフ

7.1. 深さフィルトレーションと楕円曲線のモジュライ. 初めの章で述べたように、多重ゼータ値の指数  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d)$  に対して、深さ  $d$  という量があった。深さに関する予想としてブロードハースト・クライマー予想という予想があるのでこれについて最後に触れたいと思う。まず多重ゼータ値の空間の中で  $\pi^2$  で生成されたイデアルによる剰余環を考える。ザギエの予想 (予想 2.3) (1) を仮定して、

$$\overline{Z_n} = Z_n / \pi^2 \cdot Z_{n-2}, \quad \overline{Z} = \bigoplus_{n \leq 0} \overline{Z_n}$$

とおく。 $\overline{Z}_n$  の中で深さが  $d$  以下の多重ゼータ値で生成される部分空間を  $\overline{Z}_n^{\leq d}$  とおき、

$$\overline{Z}_n^d = \overline{Z}_n^{\leq d} / \overline{Z}_n^{\leq d-1}$$

とおく。これについては次の予想がある。

**予想 7.1** (ブロードハースト-クライマー).

$$\Phi(s, t) = \sum_{n,d} (\dim_{\mathbf{Q}} \overline{Z}_n^d) s^n t^d = \frac{1}{1 - \mathbf{O}t + \mathbf{S}t^2 - \mathbf{S}t^4}$$

ここで、

$$\mathbf{O}(s) = \frac{s^3}{1-s^2}, \quad \mathbf{S}(s) = \frac{s^{12}}{(1-s^4)(1-s^6)}$$

である。

ここで注目すべき点は母関数  $\mathbf{S}(s)$  は楕円尖点形式の次元に関する母関数となっている点である。

多重ゼータ値の深さフィルトレーションを扱うには退化した、あるいは退化する直前の楕円曲線の基本群と  $M_{0,4} = \mathbf{C} - \{0, 1\}$  の基本群の関係をみると様子がよくわかる。楕円曲線の基本群はすでに混合テイト・モチーフの範囲を超えていてそれは楕円曲線の 1 次のコホモロジーの拡大の繰り返しとして得られる混合楕円モチーフとなっている。そして退化する直前の楕円曲線には  $M_{0,4}$  の基本群を埋め込むことができ、混合楕円モチーフと混合テイト・モチーフに関係がつく。どのような状態になっているかを詳しい定義をここで述べることはできないが、 $M_{0,4}$  の基本群と混合テイト・モチーフの類似で述べることにする。

まず  $M_{1,3}$  を種数が 1 の曲線とその上の 3 点のモジュライ空間としてその上の混合楕円モチーフを混合テイト・モチーフの構成と同様にホップ代数  $\mathcal{H}(MEM/M_{1,3})$  を定義することにより構成する。混合テイト・モチーフと異なるところは  $SL(2)$  の表現論を用いるところである。 $M_{1,3}$  上の普遍楕円曲線から第一普遍切断  $s_1$  を除いたものなかで  $s_2$  と  $s_3$  を結ぶ道のホモトピー類の属を  $\pi_1(E - \{s_1\}, s_2, s_3)$  とすると、

$$\Pi_n(E) = \mathbf{Q}\langle \pi_1(E - \{s_1\}, s_2, s_3) \rangle / I^{n+1}$$

は楕円モチーフの圏の対象となる。ここには  $M_{1,3}$  の点  $p$  を決めるごとにベッチ・ファイバー関手  $\omega_{p,B}$  とド・ラム・ファイバー関数  $\omega_{p,dR}$  がある。さらに  $E_p$  内の点  $s_2, s_3$  を結ぶ道  $\gamma_E$  を選ぶと (6.1) と同様にして下の図式を得る。

$$\begin{array}{ccc} \omega_{p,dR}(\Pi_n(E)^*) & \longrightarrow & \omega_{p,B}(\Pi_n(E)^*) \otimes {}_B\mathcal{H}(MEM/M_{1,3})_{dR} \\ & & \downarrow \text{ev}_{\gamma_E} \otimes \text{id} \\ & & {}_B\mathcal{H}(MEM/M_{1,3})_{dR} \end{array}$$

まだ証明が完全に完成しているわけではないが、さらに  $p$  として  $M_{1,3}$  の境界の近くの点を取り、 $M_{0,4}$  を  $E - \{s_1\}$  に無限小に埋め込んだものを極限ではなく実際のモチーフとして構成できるものと思われる。そのように構成されたモ

チーフを用いて下のような退化の状況からられる可換図式を考えることができると思われる。

$$(7.1) \quad \begin{array}{ccc} \omega_{p,dR}(\Pi_n(E)^*) & \longrightarrow & {}_B\mathcal{H}(MEM/M_{1,3})_{dR} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{dR}^n(X_n; E_n) & \longrightarrow & {}_B\mathcal{H}(MTM/\mathbf{Z})_{dR}^+ \end{array}$$

さらにパタシュニックや木村-寺杣により構成されているホップ代数  ${}_B\mathcal{H}(MEM/M_{1,3})_{dR}$  は楕円曲線の高次チャウ群を用いて構成されているが、そのような扱い難いものではなく、テータ・シンボルで構成されたわかりやすい  $K$ -群の元のみを用いることで代用できるものと思われ、これが大きな手がかりとなると予想される。

### 参考文献

- [DG] Deligne, Pierre; Goncharov, Alexander B. Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Serie 4, Volume 38 (2005) no. 1, pp. 1-56.
- [Dr] Drinfel'd, V.G.: Quasi-Hopf algebras. Leningrad Math. J. 1 (1990), 1419-1457.
- [T1] Terasoma, T. Mixed Tate motives and multiple zeta values. Invent. math. 149, pp.339-369.
- [T1] Terasoma, T. DG-category and simplicial bar complex, Moscow Mathematical Journal, vol 10,no.1, (2010), pp.1-37.
- [Z] Zaiger, D. Values of zeta functions and their applications, First European congress of mathematics (ECM), Paris, France, July 6-10, 1992. Volume II : Invited lectures (Part 2) 1994