

「特異点をもつ曲面の幾何学」(2023 年 12 月, 岡シンポジウムにて)

梅原雅顕 (東京工業大学・情報理工学院)

ABSTRACT. これは, 筆者が 2023 年 12 月に「岡シンポジウム」に於いて「特異点をもつ曲面の幾何学」について講演をした内容をまとめたので, 第一部では, 特異点の近傍における局所的な曲面の振る舞いについて, 第二部では, 特異点をもつ閉曲面の大域的な振る舞いを中心として解説を行う.

1. 第一部「特異点をもつ曲線・曲面の微分幾何学」



図 1. 下に凸に配置されたサイクロイド

1.1. 特異点が微分幾何学に登場する場面. 半径 $r(> 0)$ の円が直線を滑ることなく転がるとき, 円上の固定点の軌跡が **サイクロイド**である. この曲線で, 式で記すと

$$\gamma(t) := r(t - \sin t, -(1 - \cos t)) \quad (t \in \mathbb{R})$$

と書け (以下の説明のため曲線を下に凸に描いている), 下記のように歴史的に重要な役割を果たした.

- (等時性) サイクロイドを x -軸に関して折り返して, 下に凸にした状態で玉を転がすと (図 1 参照), どこに玉をおいても最下部に到達する時間が等しい (C. Huygens).
- (最速降下性) 左端最上部である原点に玉を置くときに移動距離が最大となる. 同一平面上にある 2 点のうち, 高い方に玉を置き, 2 点を通る平面曲線に沿って, 玉を転がすとき最も早く, もう一方の地点に到達する曲線は, このように配置されたサイクロイドである (J. Bernoulli).

サイクロイドは, $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ のときカusp特異点をもつが, この事実は教科書などでは, あまり強調されないことが多い.

次に, 曲面としての典型的な例を挙げよう. ガウス曲率が恒等的に零である線織面は**可展面**とよばれ, 紙を伸び縮みなしに変形するとき得られる曲面である. 局所的には, 平面・柱面・錐面・接線曲面のいずれかであることが知られている (図 2).

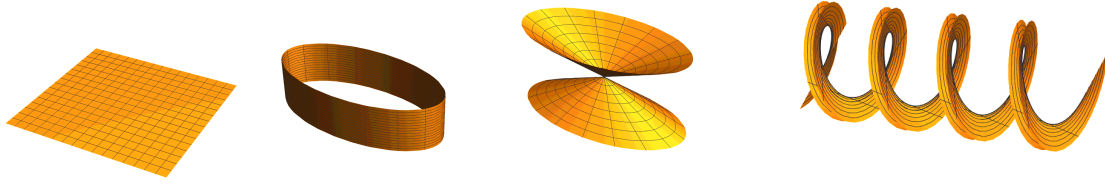


図 2. 左から平面, 柱面 (楕円柱), 錐面 (楕円錐), (常螺旋の) 接線曲面

平面と柱面は特異点を持たないが, 錐面と接線曲面は, 延長すると特異点が現れる. 図 2 の右端は, 常螺旋 Γ の各点から接線を延ばしてできる「接線曲面」で, 生成曲線である Γ の各点は, カスプ辺とよばれる特異点を与え, ドリルの刃のような形状となる.

1.2. 特異点の名前の付け方.

定義 1.1. 开区間 $I = (a, b)$ ($a < b$) 上で定義された曲線 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ($t \in I$) が滑らかとは, $x(t)$ と $y(t)$ が共に I 上の C^∞ -級の関数となるときをいう. また $\gamma'(t_0) \neq \mathbf{0}$ となる点 $t = t_0$ ($t_0 \in I$) を正則点といい, $\gamma'(t_0) = \mathbf{0}$ となる点を特異点という. すべての点で正則となる曲線を正則曲線という.

曲線の場合を例に特異点の命名法を説明する. 平面曲線

$$\gamma_0(t) = (x_0(t), y_0(t)) \quad (t \in \mathbb{R})$$

が $t = 0$ に特異点をもつとし, それに「標準的な X 特異点」と名前を付けたとせよ. これとは別に, 开区間 I で定義された平面曲線 $\gamma(t)$ ($t \in I$) が, $t = c \in I$ に特異点をもつとし, 定義域のパラメータ変換 $t = t(s)$ ($t(0) = c$) と平面 $\mathbb{R}^2$ の微分同相写像 Φ が存在し,

$$\Phi \circ \gamma \circ t(s) = \gamma_0(s) \quad (|s| < \varepsilon)$$

が, 十分小さい正の数 ε について成り立つとき, γ は, $t = c$ において X 特異点をもつと定める. 以上が曲線の場合であるが, 後で主題となる曲面の場合も含め, 一般には, 標準的な写像芽を与え名前「X」を付け, その写像芽に, 定義域と値域の座標変換で一致させることができる写像芽を「X 特異点」とよぶ.

曲線の上に現れる代表的な特異点の標準形として

$$\gamma_1(t) := (t^2, t^3), \quad \gamma_2(t) := (t^3, t^4), \quad \gamma_3(t) := (t^2, t^5)$$

が挙げられる. これらは, すべて $t = 0$ に特異点を持ち, それぞれ「標準的カスプ」, 「標準的 4/3-カスプ」, 「標準的 5/2-カスプ」とよばれる. また, 上述のルールに従い, この 3 つの写像から, カスプ, 4/3-カスプ, 5/2-カスプという名の特異点が定義される. 5/2-カスプは, カスプより鋭く尖る (図 3 左). 標準的 4/3-カスプは原点で C^1 -級の関数 $y = x^{4/3}$ のグラフで表せるので尖らない (図 3 中央). 平面曲線 $\gamma(t)$ が $t = c$ に特異点をもつとき, 以下のことが知られている ([16] を参照).

- $t = c$ がカスプであることと, $\det(\gamma''(c), \gamma'''(c)) \neq 0$ は同値, また
- $t = c$ が 4/3-カスプ であることと, $\det(\gamma''(c), \gamma'''(c)) = 0$ かつ $\det(\gamma'''(c), \gamma^{(4)}(c)) \neq 0$ となることは同値であり,

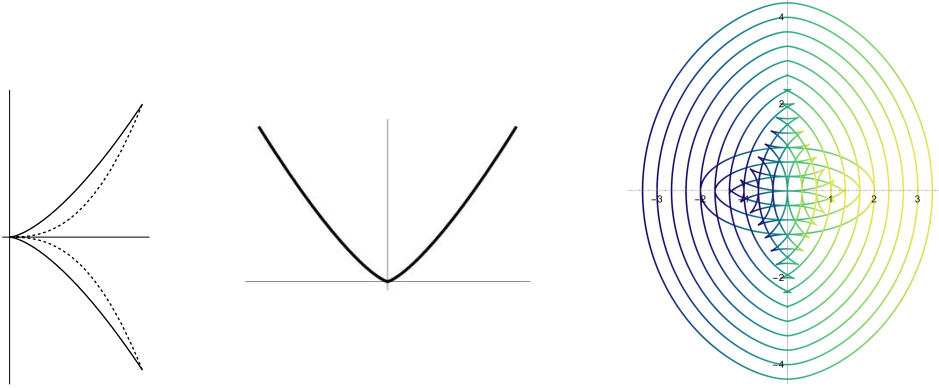


図 3. 左は標準的カusp (実線) と標準的 5/2-カusp (点線), 中央は標準的 4/3-カusp, 右は楕円 $\gamma(t) = (2 \cos t, \sin t)$ の平行曲線族

- $t = c$ が 5/2-カusp であることと, $\det(\gamma''(c), \gamma'''(c)) = 0$ かつ

$$3 \det(\gamma''(c), \gamma^{(5)}(c))\gamma''(c) - 10 \det(\gamma''(c), \gamma^{(4)}(c))\gamma'''(c) \neq \mathbf{0}$$

となることは同値である.

特異点の判定条件の証明は, 曲線の場合でも簡単ではない. $\gamma(t)$ ($a \leq t \leq b$) を正則曲線 (特異点のない曲線) とし, $\mathbf{n}(t)$ を左向き単位法線ベクトルとし, $\delta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\gamma_\delta(t) := \gamma(t) + \delta \mathbf{n}(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

で定義される曲線は γ の平行曲線といい, γ の像を波の最前線 (wave front) と思ったときの δ 時間経過後の形状を表す (Huygens の原理). 図 3 右は, 横長の楕円の平行曲線の図で, 内向きに波面を時間発展させると, しばらくは縮み, カusp が対発生する直前に 4/3-カusp が生じる. その後 4 つのカusp が現れるが, 縮小から拡大に転じたあと, 縦長の卵形線となり真円に近づく. 正則曲線の平行曲線には 5/2-カusp は現れない.

1.3. カusp 的曲率. 筆者の曲線・曲面に対する特異点へのアプローチは, 微分幾何学的なもので, 「特異点における不変量を構成し周囲の曲率等との関係を調べる」というものである. ここでは, 特に, 曲線のカusp 特異点について, (よく知られる不変量を組み合わせることで) 「特異点の尖り具合」を表す幾何学的な不変量を与えよう. 曲線 γ において, $\gamma''(c) \neq \mathbf{0}$ を満たす特異点 $t = c$ を基点とする (符号付きの) 長さ $s(t)$ と曲線の曲率関数 $\kappa(t)$ ($t \neq 0$) は, それぞれ

$$s(t) := \int_c^t |\gamma'(u)| du, \quad \kappa(t) := \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{|\gamma'(t)|^3}$$

で与えられる, ただし $|\gamma'(u)| := \sqrt{\gamma'(u) \cdot \gamma'(u)}$ であり, 「 $\cdot$ 」は内積を表す. $t \rightarrow 0$ のとき, $s(t)$ は 0 に収束し, $|\kappa(t)|$ は ∞ に発散する. そこで, 両者のオーダーが釣りあうように商を作ると, 以下のことが示される.

Fact 1.2. $t = c$ がカスプ特異点のとき

$$2\sqrt{2}\lim_{t \rightarrow c} \sqrt{|s(t)|}k(t) = \frac{\det(\gamma''(c), \gamma'''(c))}{|\gamma''(c)|^{5/2}}$$

が成り立つ. この式の右辺の値を (特異点 $t = c$ における曲線 γ の) **カスプ的曲率**といい $\hat{\mu}$ で表す¹.



図 4. カスプのジグ (左) とザグ (右)

カスプ的曲率 $\hat{\mu}$ について以下が成り立つ.

- $\hat{\mu}$ の正負と, 特異点付近の曲率関数の符号が一致し, $\hat{\mu} > 0$ のとき**ジグ**, $\hat{\mu} < 0$ のとき**ザグ**という² (図 4 右).
- サイクロイドは, 転がる円上の点の軌跡だが, その円の半径を**サイクロイドの半径**とよぶ. $t = c$ を γ のカスプとすると, 「 $\gamma(c)$ を通り曲線 γ を最もよく近似するサイクロイド」の半径の逆数の平方根は $|\hat{\mu}|$ に一致する.

この後の話で, 曲面の特異点についても, 特異点における不変量を与える.

1.4. 曲面に現れる代表的な特異点. uv -平面 を $\mathbb{R}^2$ で表し, D^2 を $\mathbb{R}^2$ の開領域とする. 写像

$$f : D^2 \ni (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3$$

が滑らかとは, $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ が, それぞれ D^2 上で何回でも微分可能であるときをいう. ベクトル積 $f_u(u, v) \times f_v(u, v)$ が零となる (D^2 上の) 点 (つまり f_u, f_v が一次従属となる点) を**特異点**, そうでない点を**正則点**という.

定義 1.3. 曲線のとく同様, 標準形としての写像の特異点を固定し, その名でよばれる特異点を定義する. つまり, 写像 f の特異点 $p \in D^2$ は, その点の近傍における適切な座標変換 φ と, $\mathbb{R}^3$ の点 $f(p)$ の近傍における適切な座標変換 Φ が存在して $\Phi \circ f \circ \varphi^{-1}$ が標準形と一致するとき, その特異点を, 標準形の名前でよぶ.

代表的な特異点をいくつか紹介しよう.

例 1.4 (錐的特異点). 以下の写像を標準形とする特異点を**錐的特異点**という.

$$f_0(u, v) := u(\cos v, \sin v, 1).$$

図 5 左のように, 像としては孤立特異点に見えるが, 定義域上では, 特異点集合は正則な閉曲線となっている. この曲面は「少し摂動させると他の特異点に遷移してしまう」という意味で

¹この不変量は, 筆者が文献 [14] において $\hat{\mu}^2$ を「サイクロイド的曲率」として導入したものを, 佐治氏・山田氏との共著論文で改良したものです.

²ジグとザグという 2 つの属性をもつカスプが並ぶとジグザグ型の曲線となることが, この名の由来である.

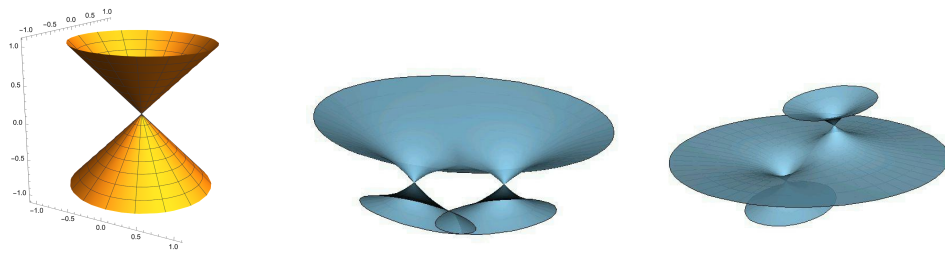


図 5. 遠くから特異点を見ると錐的特異点に見える曲面

安定ではないが、対称性の高いガウス曲率一定曲面などに頻繁に現れる．この特異点の重要性は、近似論的な意味をもつ処にある．3次元時空 (Lorentz-Minkowski space) $(\mathbb{R}^3, ++-)$ における極大曲面 (平均曲率零の空間的曲面) が、コンパクトな特異点をもつとき、遠くから見ると、錐的特異点にしか見えない (図 5 中央, 右) ということが頻繁に起こる．その場合に、特異点を「錐的特異点」と近似的にみなすことで、大雑把な推論あるいは予測をするのに役立つ．

例 1.5 (カスプ辺とツバメの尾). 2つの写像 $f_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($i = 1, 2$) を考える

$$(1.1) \quad f_1(u, v) := (v^2, v^3, u), \quad f_2(u, v) := (3u^4 + u^2v, 2u^3 + uv, v).$$

これらの写像は原点 $(0, 0)$ に特異点をもつが、それぞれ**標準的カスプ辺特異点** (図 6 左), **標準的ツバメの尾特異点** (図 6 中央) とよぶ．これらの特異点では、曲面の単位法線ベクトル場が特異点まで滑らかに拡張される．すると第一基本形式だけでなく第二基本形式も特異点の近傍で定義できるため、微分幾何学的な考察をするのに適している．偶然かもしれないが、方程式論から定まる標準形 f_1, f_2 は、両者共に (正則点において) ガウス曲率が恒等的に零となる．カスプ辺は自己交叉をもたないが、ツバメの尾は、自己交叉の集合の始点となっている．もしも閉曲面が、カスプ辺とツバメの尾のみ許容する場合には、自己交叉を辿ると、もう一つのツバメの尾を見つけることができる．図 6 右は、3次元 Euclid 空間の平坦な曲面で、楕円の平行曲線から派生してできるものだが、4個のツバメの尾を除けば、他の特異点はすべてカスプ辺である．

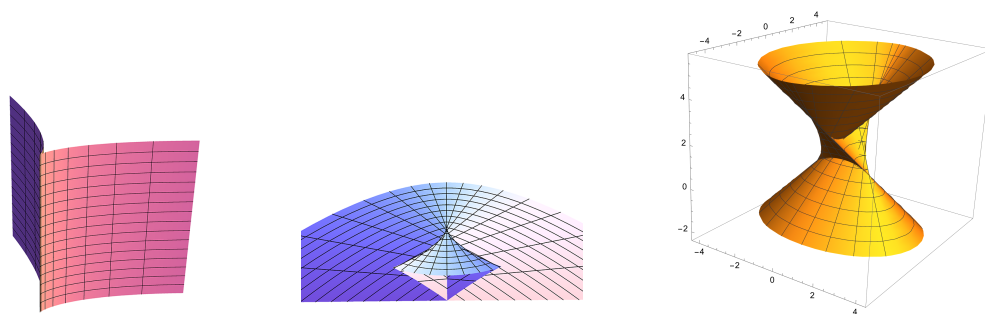


図 6. 標準的カスプ辺 (左) と標準的ツバメの尾 (中央), および楕円の平行曲線から作られる可展面 (右)

例 1.6 (交叉帽子とカスプ状交叉帽子). 以下の写像の原点に現れる特異点をそれぞれ, 標準的交叉帽子 (図 7 左端) と標準的カスプ状交叉帽子 (図 7 左中央) という.

$$(1.2) \quad f_3(u, v) := (u, uv, v^2), \quad f_4(u, v) := (u, uv^3, v^2).$$

交叉帽子は, 上述の錐的特異点と異なり, 値域だけでなく定義域においても孤立特異点となっている. この特異点は, ツバメの尾と同様に自己交叉の始まりであり, 「交叉帽子以外の特異点をもつ $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への滑らかな写像を摂動させて, 正則点か交叉帽子特異点だけが現れるようにできる」という意味で「一般的 (generic)」な特異点と云える. しかし, 「特異点まで込めて単位法線ベクトル場が連続に拡張できない」ので, 微分幾何学的に扱う場合には第二基本形式の不連続性が問題となる. 一方, カスプ状交叉帽子特異点は, 形状としては, 交叉帽子とカスプ辺のハイブリッドである. この特異点は, 交叉帽子同様に自己交叉の始点であるが, 特異点は孤立せず, カスプ状交叉帽子特異点以外の周囲の特異点は, すべてカスプ辺となっている. この特異点は, 交叉帽子特異点とは異なり, 単位法線ベクトルは滑らかに拡張され, 第二基本形式は特異点の近傍で滑らかに定義される.

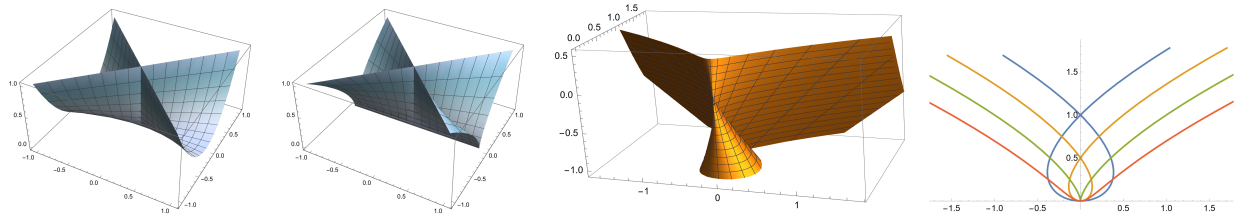


図 7. 左から, 標準的交叉帽子と標準的カスプ状交叉帽子, 曲線の変形 $\gamma_s(t) := (ts + t^3, t^2)$ に対応する交叉帽子, および $s = -1$ (青), $-1/2$ (橙), 0 (緑), $1/2$ (赤) のときの曲線 $\gamma_s(t)$ の概形

ここで, Whitney [19] による交叉帽子特異点の判定条件を紹介する.

Fact 1.7. $(U; u, v)$ を $\mathbb{R}^2$ の領域, C^∞ -写像 $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ が $p \in U$ に特異点をもつとし, $f_v(p) = 0$ とせよ. 点 $p \in U$ が交叉帽子であるための必要十分条件は $\det(f_u(p), f_{uv}(p), f_{vv}(p)) \neq 0$ となることである.

例えば, $f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto (xy, yz, zx) \in \mathbb{R}^3$ で定まるベクトル値関数の単位球面への制限は **Roman 曲面**と云うが (図 8 左・中央), 実射影平面 $\mathbb{P}^2$ からの写像として現れる 6 個の特異点が交叉帽子であることを, 上記の事実によって簡単に確かめることができる. また

$$f(u, v) := (u, uv + u^3, u^2) \quad (u, v \in \mathbb{R})$$

で与えられる写像 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ は, 原点 $(0, 0)$ に交叉帽子特異点をもつことも上記の事実からわかる (図 7 中央右). ここで s をパラメータとする曲線 $\gamma_s(t) := (ts + t^3, t^2)$ を考えると, $x = s$ なる平面による f の像の切り口が曲線 γ_s とみなせる. s がいくつかの値のときに γ_s を描いたのが図 7 (右端) である. このように断面としての曲線族を考えると曲面上の特異点の形状解析に役立つ.

本講では, 交叉帽子特異点以外の判定法は具体的に述べないが, 「カスプ辺とツバメの尾の判定条件は [12] で, カスプ状交叉帽子の判定条件は [2] で与えられ, [16] の本に記されている.



図 8. 左から Roman 曲面とその断面, (一般化された) カスプ辺としての「常螺旋の接線曲面」と平面曲線のカスプにおける「カスプ方向」

1.5. 一般化されたカスプ辺. I を开区間とし, なめらかな写像

$$f : I \times (-\delta, \delta) \ni (u, v) \mapsto f(u, v) \in \mathbb{R}^3$$

が以下の 3 つの性質を満たすとき, **一般化されたカスプ辺**という.

- (a) 特異点の像を与える曲線 $\Gamma : I \ni u \mapsto f(u, 0) \in \mathbb{R}^3$ は, 空間正則曲線を与える,
- (b) 各 u に対して, $f_v(u, 0) = \mathbf{0}$ かつ $f_{vv}(u, 0) \neq \mathbf{0}$,
- (c) 各 u に対して, ベクトル $f_{vv}(u, 0)$ と $f'_u(u, 0)$ は一次独立である³.

交叉帽子は孤立特異点であり, ツバメの尾は特異集合の像が正則曲線にならないため, 両特異点はいずれも一般化されたカスプ辺にならないが, カスプ辺とカスプ状交叉帽子は一般化されたカスプ辺である (実際, (1.1) で与えられたカスプ辺 $f_1(u, v)$ と (1.2) で与えたカスプ状交叉帽子 $f_3(u, v)$ は, 共に上記の一般化されたカスプ辺の定義を満たす). 常螺旋の接線曲面は, カスプ辺のみからなるので一般化されたカスプ辺となる.

一般化されたカスプ辺の表現公式を紹介する: 点 $\Gamma(u)$ において「曲線 Γ に直交する平面による曲面 f の像の切り口」である平面曲線 σ は, f の特異点に相当する部分にカスプをもつ. この曲線 σ の接線をカスプにまで動かしてできる線はカスプを貫く. この線において曲線 σ が存在する方向に向かって矢印をつけ (図 8 右端), 定まる方向を**カスプ方向**とよぶ (図 8 右端). いま

$$\mathbf{d}(u) := \mathbf{D}(u)/|\mathbf{D}(u)|, \quad \mathbf{D}(u) := f_{vv}(u, 0) - \frac{f_{vv}(u, 0) \cdot \Gamma'(u)}{\Gamma'(u) \cdot \Gamma'(u)} \Gamma'(u)$$

とおくと, $\mathbb{R}^3$ において $\mathbf{d}(u)$ は, 点 (u, v) におけるカスプ方向の単位ベクトルを与える. u を $\Gamma(u)$ の弧長パラメータとすると,

$$\mathbf{e}_1 := \Gamma', \quad \mathbf{e}_2 := \mathbf{d}, \quad \mathbf{e}_3 := \Gamma' \times \mathbf{d}$$

は, u を固定するごとに $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底となるが

$$f(u, v) := \Gamma(u) + A(u, v)\mathbf{e}_2(u) + B(u, v)\mathbf{e}_3(u),$$

$$\begin{pmatrix} A(u, v) \\ B(u, v) \end{pmatrix} := \int_0^v u \begin{pmatrix} \cos \lambda(u, w) \\ \sin \lambda(u, w) \end{pmatrix} dw, \quad \lambda(u, v) := \int_0^v \mu(u, w) dw$$

³2 つのベクトル $f_{vv}(u, 0)$, $f'_u(u, 0)$ が張る平面を**極限接平面**とよぶ. 一般化されたカスプ辺では, 法線方向は特異点まで滑らかに拡張され, この平面に直交する.

と定めることにより一般化されたカस्प辺ができる．逆に一般化されたカस्प辺は適切な座標変換により，すべてこの形にできる⁴．このとき，

- $|f_v(u, v)| = |v|$ となり， $\partial^k \mu(u, 0)/\partial v^k$ ($k \geq 1$) はすべて，特異点の不変量である．また
- $\mu(u, 0) \neq 0$ と， $(u, 0)$ が f のカस्प辺 (特異点) であることが同値であり，
- $\mu(u, 0) = 0$ かつ $\mu_u(u, 0) \neq 0$ と $(u, 0)$ がカस्प状交叉帽子 (特異点) となることは同値である．

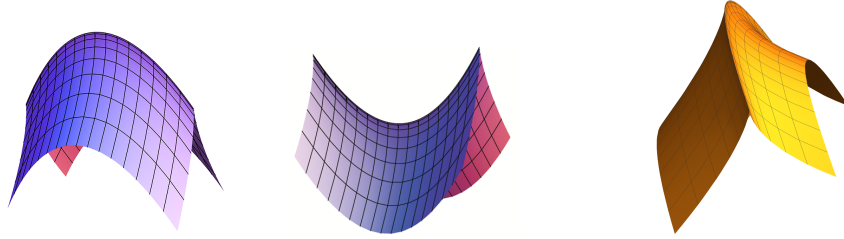


図 9. 特異曲率 κ_s が正と負のカस्प辺 (左と中央) と，極限法曲率 κ_n が零でないカस्प辺 (右)

1.6. 一般化されたカस्प辺の 3 つの不変量．一般化されたカस्प辺の特異曲線の像 $\Gamma(u)$ における値

$$\kappa_s(u) := \Gamma''(u) \cdot \mathbf{e}_2(u), \quad \kappa_n(u) := \Gamma''(u) \cdot \mathbf{e}_3(u), \quad \hat{\mu}(u) := 2\mu_0(u, 0)$$

を，それぞれ特異曲率，極限法曲率，カスピ的曲率とよぶ．

- $\hat{\mu}(u) \neq 0$ のとき，曲面を $\Gamma'(u)$ に直交する平面で切ってできる平面曲線の特異点におけるカスピ的曲率は値 $\hat{\mu}(u)$ に等しい．
- 特異曲率 $\kappa_s(u)$ は第一基本形式だけから定まり， κ_s が正 (負) なら，特異点付近の形は凸 (凹) 状になる (図 9)．

助変数表示された曲面の正則点 p では，法線を含む平面で曲面を切ったときにできる平面曲線の (点 p における) 曲率の最大値と最小値として定まる 2 つの値 λ_1, λ_2 を主曲率というが，ガウス曲率 K と，平均曲率 H は，点 p においてそれぞれ

$$K := \lambda_1 \lambda_2, \quad H := \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$$

で与えられる．一般化されたカस्प辺 $f(u, v)$ においては，定義域における u 軸が特異点集合であるが $v \neq 0$ のとき，ガウス曲率と平均曲率が定まり，以下の v に関する展開式を満たす．

$$(1.3) \quad K(u, v) = \frac{\kappa_n(u)\mu_0(u)}{v} - \kappa_s(u)\mu_0(u)^2 + \kappa_n(u)\mu_1(u) - \omega(u)^2 + O(v),$$

$$(1.4) \quad H(u, v) = \frac{\mu_0(u)}{2v} + \frac{\mu_1(u) + \kappa_n(u)}{2} + O(v),$$

⁴これは埼玉大の福井敏純氏 [4] が $\Gamma'' \neq 0$ となる場合に作った公式の改良版で，福井氏らと筆者の共同研究 [5] に収録されております．

但し

$$\mu_0(u) := \mu(u, 0), \quad \mu_1(u) := \mu_v(u, 0), \quad \omega(u) := \mathbf{e}'_3(u) \cdot \mathbf{e}_2(u)$$

である．このことから，例えば以下のことがわかる．

- カスプ辺では $\mu_0 \neq 0$ なので，平均曲率 H は特異点付近で非有界である．
- 特異曲率 $\kappa_s(u)$ と同様に，極限法曲率とカスプ的曲率の積

$$\kappa_{\Pi}(u) := \kappa_{\mathbf{n}}(u)\hat{\mu}(u) \left(= \frac{1}{2}\kappa_{\mathbf{n}}(u)\mu_0(u) \right)$$

は第一基本形式だけから決まり， $\kappa_{\Pi}(u)$ が非零ならガウス曲率 $K(u, v)$ は $H(u, v)$ と同様に非有界となる．

ガウス曲率 $K(u, v)$ が非有界となる場合だが，特異点集合としての空間曲線 $u \mapsto f(u, 0)$ の左右で，ガウス曲率の符号が逆であることが (1.3) から読み取れる．実際，図 9 右は，そのようなカスプ辺の例である．

2. 第二部「特異点をもつ曲面の大域的な性質」

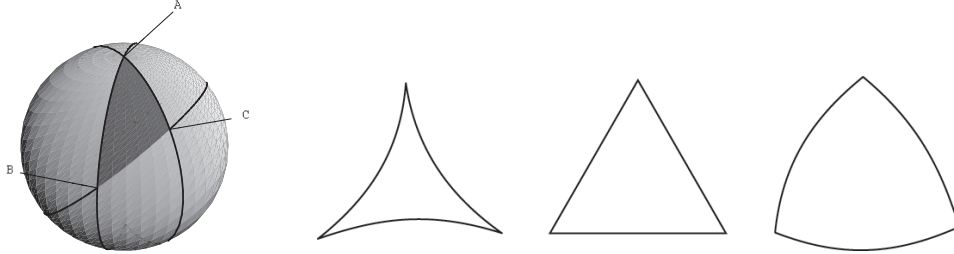


図 10. 左から，双曲面・平面・球面の測地三角形および，球面上の測地三角形

2.1. Gauss-Bonnet の公式. よく知られている正則曲面に対する Gauss-Bonnet の公式の復習から話を始める: $f : U(\subset \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ を正則曲面 (特異点を持たない曲面) とし, K をガウス曲率, $dA := |f_u \times f_v| du dv$ を面積要素とし, U 上の測地三角形 $\triangle ABC$ を考える (図 (10) 左). このとき

$$(2.1) \quad \int_{\triangle ABC} K dA = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$$

が成り立つが, これを「局所版 Gauss-Bonnet の公式」とよぶ. この式は, 測地三角形の内角の和と 2π との差が, ガウス曲率の三角形上の積分に等しい, という関係を表し,

$$\angle A + \angle B + \angle C < \pi \quad (K < 0 \text{ のとき}),$$

$$\angle A + \angle B + \angle C > \pi \quad (K > 0 \text{ のとき})$$

を意味する. 図 10 に記したように, 三角形が曲率が負であると痩せて, 正になると太る. このように理解すると「ガウス曲率」の符号の定義の妥当性がわかる.

特異点をもたない閉曲面 S が与えられたときには, その曲面の測地三角形分割を与え, 局所版の公式 (2.1) を辺々加えると

$$(2.2) \quad \int_S K dA = 2\pi\chi(S)$$

が得られる (証明は [15] 等をみよ). ここで $\chi(S)$ は, 曲面 S のオイラー数である. この式はコンパクト 2 次元リーマン多様体でも成り立つ. また, コンパクト偶数次元リーマン多様体にまで拡張できる.

2.2. 特異点をもつ曲面. 図 11 は特異点をもつ閉曲面の例である. このような閉曲面について Gauss-Bonnet の定理を拡張する. まず, 交叉帽子特異点は, この特異点を許しても Gauss-Bonnet の公式がそのまま成り立つ⁵ ([6]). 図 11 左は, 第一部で紹介した Roman 曲面で, 実射影空間からの写像と思うと向き付け不可能となり, 6 個の交叉帽子特異点を持ち, オイラー数は 1 で Gauss-Bonnet 型の公式が (そのまま) 適用できる. 但し, 交叉帽子は, 第一部で紹介した特異

⁵つまり, 特異点の情報は曲率の積分に影響を与えない.

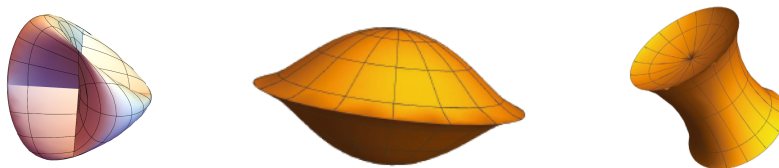


図 11. ローマン曲面, 目形回転曲面, 太鼓状曲面

点の中では唯一, 単位法線ベクトル場が特異点の近傍で連続に拡張できない故, 以下の議論では除外する.

まず, M^2 をコンパクトで向き付け可能な 2 次元多様体とし, $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を, はめ込みとする. 向き付け可能性により, f には M^2 上で定義された単位法線ベクトル場 $\mathbf{n}$ が存在するが,

$$f_\delta := f + \delta \mathbf{n} \quad (\delta \in \mathbb{R})$$

とおくと, Huygens の原理により f_δ は, 初期曲面を波面 (波の最前線) と思ったときの δ 時間経過後の時間発展を表す. δ を動かすと特異点をもつ曲面が得られる. 図 12 は楕円面 $x^2/3 + y^2/2 + z^2 = 1$ の平行曲面である. $\mathbf{n}$ を内向きにとると, 最初は曲面が縮み, やがて自己交叉と特異点が現れるが, その後拡大し始め, 再び卵形面となって, 次第に真球に近づいていく. 途中で現れる特異点は, ほとんどの時刻でカスプ辺とツバメの尾のみである.

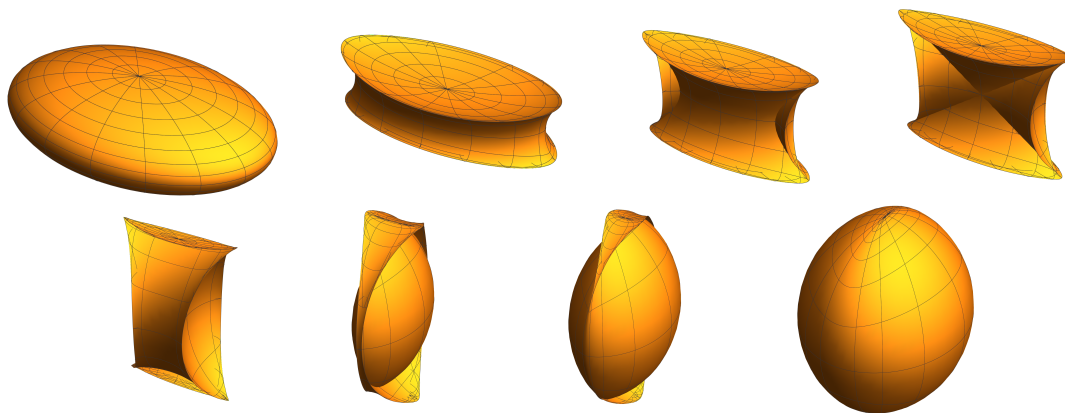


図 12. 楕円面の平行曲面, 上段は左から $\delta = 0, 0.3, 0.45, 0.5$, 下段は左から $\delta = 0.7, 1.0, 1.2, 2.5$.

2.3. 波面 (wave front) とフロンタル (frontal). 上述の正則曲面の平行曲面を含む曲面のクラスとして, 「フロンタル」と (抽象的な概念としての) 「波面」を定義する. M^2 を 2 次元多様体とする.

定義 2.1. C^∞ -写像 $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が (余向き付け可能な) **フロンタル** (frontal) とは, M^2 全体で定義された単位法線ベクトル場 $\mathbf{n} : M^2 \rightarrow S^2(\subset \mathbb{R}^3)$ が存在するときをいう⁶. さらに, $L := (f, \mathbf{n}) : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2$ が, はめ込みなら f は**波面** (wavefront) という.

上述の単位法線ベクトル場 $\mathbf{n} : M^2 \rightarrow S^2(\subset \mathbb{R}^3)$ は $\mathbb{R}^3$ への写像として, それ自体フロンタルになる. 実際 $\mathbf{n}$ の単位法線ベクトル場は自分自身である. 正則曲面の平行曲面は波面の典型例であり,

- 交叉帽子は, フロンタルでない (図 15 右端).
- カスプ辺とツバメの尾および錐的特異点は波面である (図 15 の 2 番目と 3 番目と 5 番目).
- カスプ状交叉帽子は, 波面でないがフロンタルである (図 15 の 4 番目).

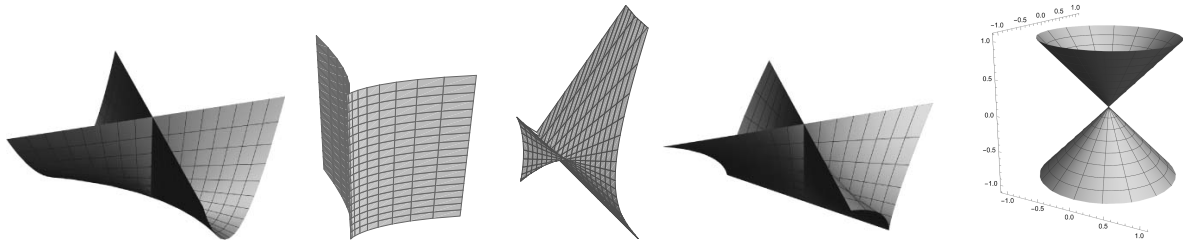


図 13. 交叉帽子, カスプ辺, ツバメの尾, カスプ状交叉帽子, 錐面

2.4. フロンタルの面積要素. M^2 は向きづけられた 2 次元多様体, $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ をフロンタル, $\mathbf{n}$ を単位法線ベクトル場とし, $(U; u, v)$ を向きに同調した局所座標とすると,

$$\lambda := \det(f_u, f_v, \mathbf{n})$$

を**符号付き面積密度関数**とよぶ. 定義から $\{p \in U; \lambda(p) = 0\}$ は, U 上における f の特異点集合を与える. λ 自体は, M^2 の座標変換で変化するが,

$$d\hat{A} = \lambda du \wedge dv, \quad dA = |\lambda| du \wedge dv$$

は, それぞれ**符号付き面積要素**, **符号なし面積要素**とよばれる. 両者は共に M^2 上で連続な 2 次微分形式であり, 特に $d\hat{A}$ は M^2 上で滑らかである. もしも $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が「はめ込み」ならば, $\pm \mathbf{n}$ の符号を調節して $dA = d\hat{A}$ とできる. 符号付き面積要素 $d\hat{A}$ を用いると

$$(2.3) \quad \Sigma_f := \{p \in M^2; d\hat{A}_p = 0\}$$

は, 写像 f の特異点集合を与える. 2 つの面積要素を用いて M^2 の部分集合

$$M_+ := \{p \in M^2; d\hat{A}_p = dA_p\}, \quad M_- := \{p \in M^2; d\hat{A}_p = -dA_p\}$$

を定義し, それぞれ M^2 の**正の領域**, **負の領域**という. 定義より

$$M^2 = M_+ \cup M_-, \quad \Sigma_f = M_+ \cap M_-$$

が成り立つ.

⁶ $\mathbf{n}$ は局所的には存在するが大域的に取れない場合を考えるとときもある. そのようなフロンタルは余向き付け不可能であると云う. 但し, そのような曲面は 2 重被覆をとると余向き付け可能にできる.

定義 2.2. $p \in M^2$ を f の特異点とせよ. p は λ の零点であるが, 外微分 $d\lambda$ が非零のとき, 点 p は**非退化な特異点**であるという (この条件は, M^2 の局所座標の取り方に依存しない).

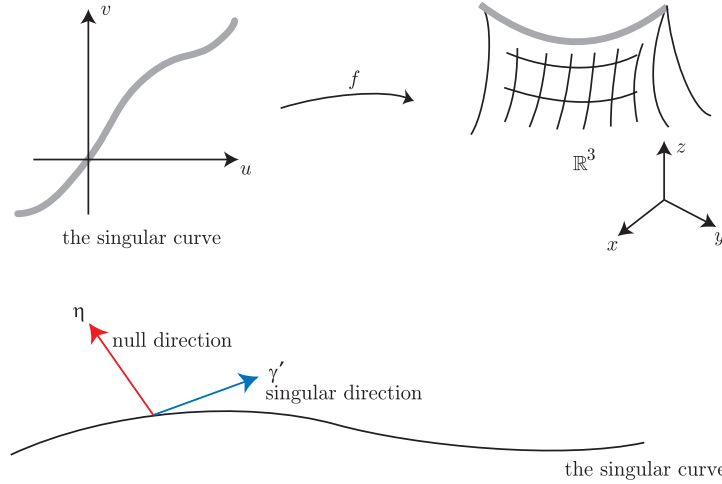


図 14. 上段は定義域における特異曲線 (左) とその像 (右), 下段は特異曲線における特異方向と退化方向

非退化な特異点の近傍では陰関数定理により, 特異点集合 $\lambda = 0$ は, 座標平面 $(U; u, v)$ における正則曲線 (**特異曲線**, singular curve と云う) となる. この正則曲線の助変数表示を $\gamma(t)$ ($|t| < \varepsilon$) とし (ε は正数とする), $p = \gamma(0)$ とする. この曲線の接ベクトル $\pm\gamma'(0)$ の方向を (点 p における) **特異方向** (singular direction) と云う. これとは別に, 特異点 $p := \gamma(t)$ において, 微分写像 df_p の線形写像としての核が定まるが, p の非退化性から, その次元は 1 次元となり, その部分空間が定める方向を (点 p における) **退化方向** (null direction) と云う.

定義 2.3. $p \in M^2$ を f の非退化な特異点とせよ. p において, この 2 つの方向が異なるとき, **第 1 種の特異点** といい, それ以外のとき **第 2 種の特異点** という.

さらに, 第 2 種の特異点 p は, 十分に小さい近傍が存在し, その近傍上では p 以外に第 2 種の特異点が存在しないとき, **許容的** であるという.

カスプ辺とカスプ状交叉帽子は, 第 1 種の特異点であり, ツバメの尾と錐的特異点は, 第 2 種の特異点である. ツバメの尾は許容的だが, 錐的特異点は許容的でない.

3. 二つの GAUSS-BONNET 型公式

フロンタル $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ は第一種か許容的な第 2 種特異点のみをもつとせよ. 前節で定義したように M^2 上には面積要素 $d\hat{A}$ と dA があるので, 二つの全ガウス曲率

$$\int_{M^2} K d\hat{A}, \quad \int_{M^2} K dA$$

が定まる. それ故, 2 つの Gauss-Bonnet 型公式が存在する.



図 15. 正のツバメの尾と，その定義域

まず，与えられた第2種の特異点 $p \in \Sigma_f$ に対して，

$$\text{sgn}(p) := \begin{cases} 1 & p \text{ における } M_+ \text{ の内角が } 2\pi \text{ のとき,} \\ 0 & p \text{ における } M_+ \text{ の内角が } \pi \text{ のとき,} \\ -1 & p \text{ における } M_+ \text{ の内角が } 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

とおく． p がツバメの尾の場合は，カスプの外が M_+ (M_-) のとき， $\text{sgn}(p) = 1$ ($\text{sgn}(p) = -1$) となる．図 15 の右側は正のツバメの尾の像，左側は正のツバメの尾の定義域を表す．

以上の準備のもと，コンパクトで向きづけられた2次元多様体上で定義されたフロンタル $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が，第1種の特異点かあるいは許容的な第2種の特異点しか持たないとき，以下の2つの式が成り立つ

$$(3.1) \quad (\text{Kossowski 型公式 [10]}) \quad \int_{M^2} K dA + 2 \int_{\Sigma_f} \kappa_s ds = 2\pi\chi(M^2),$$

(Langevin-Levitt-Rosenberg 型公式 [13])

$$(3.2) \quad 2\deg(\mathbf{n}) = \frac{1}{2\pi} \int_{M^2} K d\hat{A} = \chi(M_+) - \chi(M_-) + \sum_{p: \text{第2種}} \text{sgn}(p),$$

但し κ_s は（第1部で述べた）特異点集合 Σ_f 上の特異曲率関数である．Kossowski 氏 [10] の研究当時，カスプ辺の判定条件はなく，特異曲率の概念もなかったため，公式の書き方は少し異なるが，実質，上記の公式と同値な命題を与えている．

3.1. もう二つの Gauss-Bonnet 型公式. 2つの写像

$$f_0(u, v) := (u, v^2), \quad f_1(u, v) := (u^3 - 3uv, v)$$

の原点 $(0, 0)$ は，それぞれ標準的折り目特異点，標準的 Whitney カスプ特異点とよばれ（図 16 の左と右），与えられた2次元多様体間の写像に対して「折り目」と「Whitney カスプ」が定義される．

折り目は第1種，カスプは第2種特異点となる．いま，コンパクトで向き付けられた多様体 M^2 上のフロンタル $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を1つ固定し，そのガウス写像 $\mathbf{n}: M^2 \rightarrow S^2(\subset \mathbb{R}^3)$ は折り目と

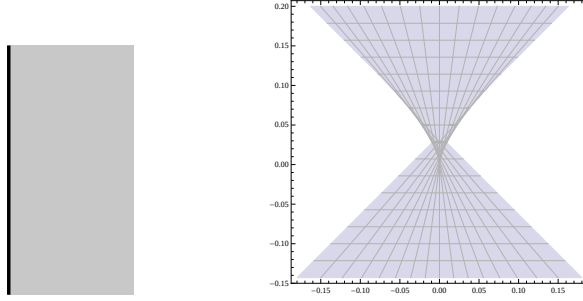


図 16. 折り目: $(u, v) \mapsto (u^2, v)$ と Whitney カスプ: $(u, v) \mapsto (u^3 - 3uv, v)$

カスプのみを持つと仮定する. 先に注意したように, ガウス写像 $\mathbf{n}$ は, それ自身がフロンタルなので, さらに2つの Gauss-Bonnet 型公式を誘導する (共同研究 [18] で筆者らは, このことを見いだした). 単位球面 S^2 のガウス曲率は1なので, ワインガルテンの公式より次が成り立つ.

$$(K_{\mathbf{n}} d\hat{A}_{\mathbf{n}} =) d\hat{A}_{\mathbf{n}} = K d\hat{A}, \quad (K_{\mathbf{n}} dA_{\mathbf{n}} =) dA_{\mathbf{n}} = |K| d\hat{A}.$$

f の単位法線ベクトル場が定めるガウス写像 $\mathbf{n}: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が, 折り目特異点とカスプ特異点しか持たないとする, フロンタル $\mathbf{n}$ に対する2つの Gauss-Bonnet 型の式は,

$$\begin{aligned} \int_{M^2} |K| dA + 2 \int_{\Sigma_{\mathbf{n}}} \kappa_{\#} ds &= 2\pi \chi(M^2), \\ \frac{1}{2\pi} \int_{M^2} K d\hat{A} &= \chi(\{K > 0\}) - \chi(\{K < 0\}) + \#C_+ - \#C_- \end{aligned}$$

と書ける. 但し $\Sigma_{\mathbf{n}}$ はガウス写像 $\mathbf{n}$ の特異点集合であり, $\#C_+$ と $\#C_-$ は, 正および負の「 $\mathbf{n}$ のカスプ」の個数, $\kappa_{\#}$ は写像 $\mathbf{n}$ の特異曲線に沿う特異曲率である. 結局, $\mathbb{R}^3$ の閉フロンタルには, 合計4個の Gauss-Bonnet 型の公式が存在することになる. 4つの Gauss-Bonnet 型の公式を組み合わせると, いろいろな応用ができるが, ここでは2つ紹介する. まずは「Bleecker-Wilson の公式」である:

定理 3.1 (Bleecker-Wilson の公式 [1]). M^2 をコンパクト向き付け可能な2次元多様体とし, $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ をはめ込みとし, $\mathbf{n}: M^2 \rightarrow S^2$: f のガウス写像とする. $\mathbf{n}$ が折り目とカスプのみをもつとすると,

$$2\chi(\{K < 0\}) = \#C_+ - \#C_-$$

が成り立つ.

(証明) f は正則曲面なので, 通常の Gauss-Bonnet の定理より

$$\frac{1}{2\pi} \int_{M^2} K d\hat{A} = \chi(M^2) = \chi(\{K > 0\}) + \chi(\{K < 0\}).$$

一方, $d\hat{A}_{\mathbf{n}} (= K d\hat{A})$ に関する Gauss-Bonnet 型公式より

$$\frac{1}{2\pi} \int_{M^2} K d\hat{A} = \chi(\{K > 0\}) - \chi(\{K < 0\}) + \#C_+ - \#C_-$$

と書き直せる．2つの式を辺々引いて定理の主張が得られる． □

上の証明で f と $\mathbf{n}$ の役割を逆転させると，以下の定理を得る．

定理 3.2 (Bleecker-Wilson の公式の双対版, 佐治・梅原・山田 [18]). $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ がカスプ辺とツバメの尾しかもたず, f のガウス写像が微分同相写像のとき

$$2\chi(\{K < 0\}) = \#S_+ - \#S_-$$

が成り立つ．但し $\#S_+$ と $\#S_-$ は, それぞれツバメの尾の個数とする．

f のガウス写像が微分同相写像となるのは f が卵形面の平行曲面のときに限る．下図 17 は, 楕円面の平行曲面であるが, 4つのツバメの尾があり $\chi(\{K < 0\}) = -2$ だから, 4つとも負のツバメの尾でなければならない．

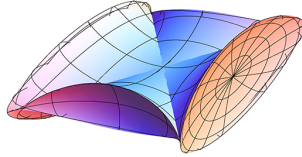


図 17. 楕円 $(x/5)^2 + (y/4)^2 + z^2 = 1$ の平行曲面

ガウス曲率の対数 $\log |K|$ が有界のときは, ガウス写像 $\mathbf{n}$ と曲面 f の特異点が一致し, いくつかの興味深い結果が得られるが, 詳細は省略する ([16] 参照).

3.2. 外の空間を払拭した Gauss-Bonnet 型定理. Gauss-Bonnet の定理において, 外の空間を払拭するには, 第一基本形式だけで定式化する必要がある．Kossowski は, 閉波面の Gauss-Bonnet 型公式を1つ見いだしたが, 別の論文 [11] で「半正定値な計量」のクラスとして **Kossowski 計量**を定義した．フロンタルの第一基本形式は Kossowski 計量である．Kossowski 氏自身は, 内的な Gauss-Bonnet 型公式を与えていないが, 講演者らは, この概念を使って, 以下のことを示した．

定理 3.3 (長谷川・本田・佐治・梅原・山田 [6]). コンパクトかつ向き付け可能な C^∞ -級の Kossowski 計量上で2つの Gauss-Bonnet 型公式が成り立つ．これを第一基本形式 $ds^2 := df \cdot df$ と第三基本形式 $d\sigma^2 := d\mathbf{n} \cdot d\mathbf{n}$ にあてはめると, 先ほどの4つの Gauss-Bonnet 型公式が得られる．

一方, Kossowski 自身は以下のことを示している．

Fact 3.4 ([11]). $KdA \neq 0$ を満たす実 Kossowski 計量 ds^2 は, 局所的には波面の第一基本形式として実現できる．特に ds^2 が第1種の退化点 p をもつと, その点の近傍をカスプ辺として実現できる．

この結果の精密化として, 筆者らは以下の定理を得た: 空間正則曲線 $\Gamma(t)$ ($|t| < 1$) を与える． ds^2 は $(\mathbb{R}^2; u, v)$ の原点 o の近傍で定義された実解析的 Kossowski 計量で, u -軸上にのみ第1種の特異点をもつとせよ．

定理 3.5 (本田・直川・梅原・山田 [7]). 原点付近で定義された $Kd\hat{A} \neq 0$ を満たす実解析的 Kossowski 計量 ds^2 に対し, 原点の近傍 U と実解析的な写像 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ が存在し以下を満たす.

(1) f の第一基本形式は ds^2 に等しい.

(2) ある $\varepsilon(> 0)$ が存在して $\Gamma(u) = f(u, 0)$ ($|u| < \varepsilon$) となる.

さらに, このような f は, 丁度 2 通り存在する.

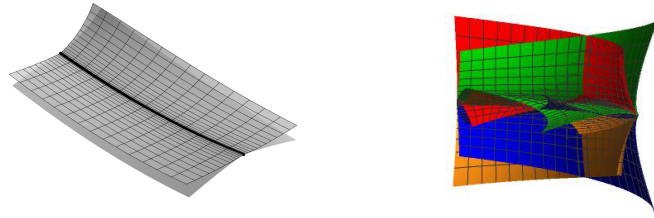


図 18. カस्प辺の異性体

曲線の向きを反転させると, Γ に沿いつつ, 同じ第一基本形式をもつカस्प辺が, さらに 2 個存在することに気づいた:

定理 3.6 (本田・直川・佐治・梅原・山田 [8]). 上の定理で, 曲線 Γ の向きを考慮しなければ, このような f は, 一般に 4 通り存在する.

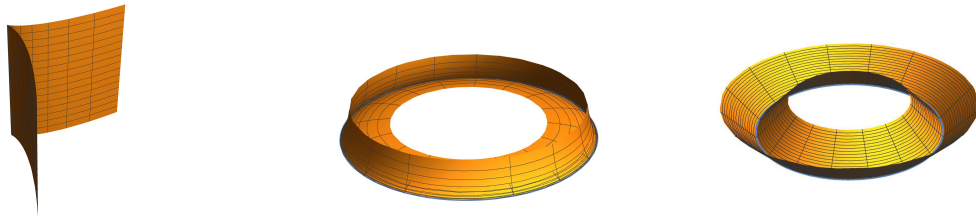


図 19. 標準的カस्प辺, 円に沿うカस्प辺, 円に沿う曲線折り

3.3. カस्प辺と折り紙の曲線折りの類似. 筆者らは, 上述の「同じ第一基本形式をもつカस्प辺」の研究をしているとき, 偶然, 「カस्प辺」と折り紙の「曲線折り」の類似性に気づいた. 折り紙の曲線折りでは, 空間正則曲線 Γ を与えて「折り目がちょうど Γ となる折り方が何通りあるか」を問題にする. すると, 上記の定理の類似が「曲線折り」に対しても成り立つ. 紙を歪ませないためには可展面 ($K = 0$) の曲面の対で, 同じ空間曲線に沿わせる. 与えられた「曲線折り」に対して, 折り目の像としての空間曲線 C を **crease** とよび, 折る前の紙に展開した状態での折り目に対応する平面曲線 Γ を **crease pattern** とよぶ.

折り紙で「曲線折り」が可能である数学的な根拠は, 紙を伸び縮みなしに変形し, 与えられた空間曲線 Γ に沿わせて可展面を作ったとき, もう 1 つ別の Γ に沿う可展面が存在するからである. 2 つの可展面を曲線 Γ に沿って配置した後, Γ に沿って切り離すと, 2 つの「曲線折り」が「対」として得られる. つまり, 「曲線折り」は存在すれば必ず, 反対側にもう 1 つの「曲線

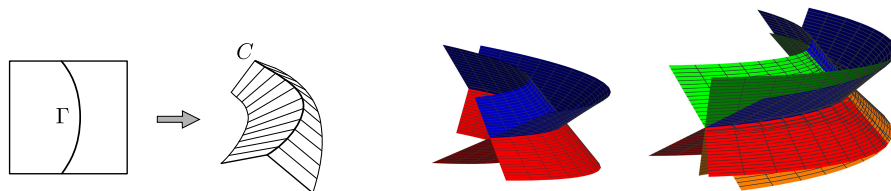


図 20. Crease pattern Γ と，その曲線折りとしての実現，4通りの折り方の例

折り」が相伴する．両者は「曲線折り」として，同じ crease (折り目) と crease pattern (折り型) をもつ．

筆者らは，定理 3.6 の類似として，折り紙の「曲線折り」においても，空間曲線の向きを反転させることで，同じ crease (折り目) と crease pattern (折り型) を持つ新たな二つの折り方の可能性を発見した (本田・直川・佐治・梅原・山田 [9])．この 4通りの折り方が全部異なることを確かめるため，区間 $I := [1/10, 9/10]$ 上で定義された空間曲線

$$\mathbf{c}(t) = \left(\arctan t, \frac{\log(1+t^2)}{\sqrt{2}}, t - \arctan t \right) \quad (t \in I)$$

に沿う形で 4通りの曲線折りを具体的に与えた (図 21)．4通りの曲線折りは， $\mathbb{R}^3$ 上ですべて非合同で，それぞれ図 22 の展開図をもつ．

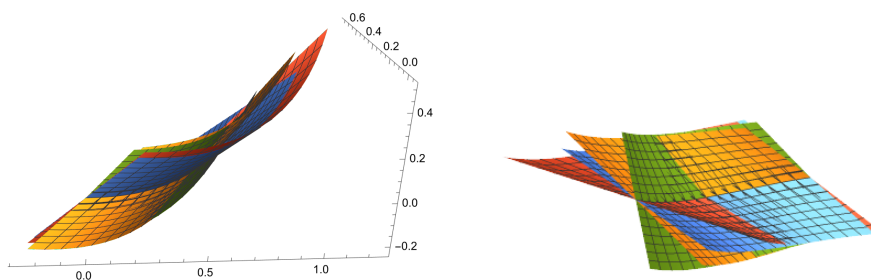


図 21. 同一の crease と crease pattern をもつ 4通りの折り方の具体例 (同じ曲面を 2つの方向から描いたもの)

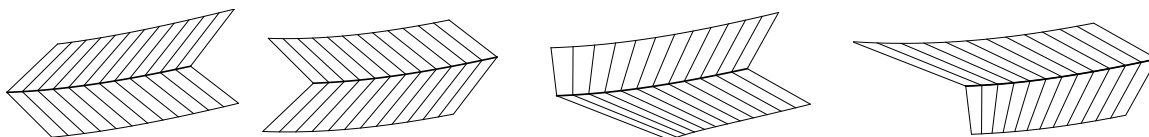


図 22. 対応する 4つの曲線折りの型紙

3.4. 筆者の最近の研究. 現在, 筆者は「実解析写像の像」の解析的な延長不可能性の判定法を与えることに取り組んでいる. 動機から説明しよう: $\mathbb{R}_1^3$ を 3次元時空とする, つまり $\mathbb{R}^3$ に符号数 $(++-)$ の標準的な Lorentz 計量を入れた空間とする. この時空の曲面に対して平均曲率が零の曲面が定義されるが, 特に誘導計量が半正定値となるときの**極大曲面**という. 極大曲面の中でも特に固定点をもつ 1次元のローレンツ変換群の作用で不変なものを**極大カテナイド**とよぶ. 全部で3種類の極大カテナイドがある (小林治氏により見いだされた).

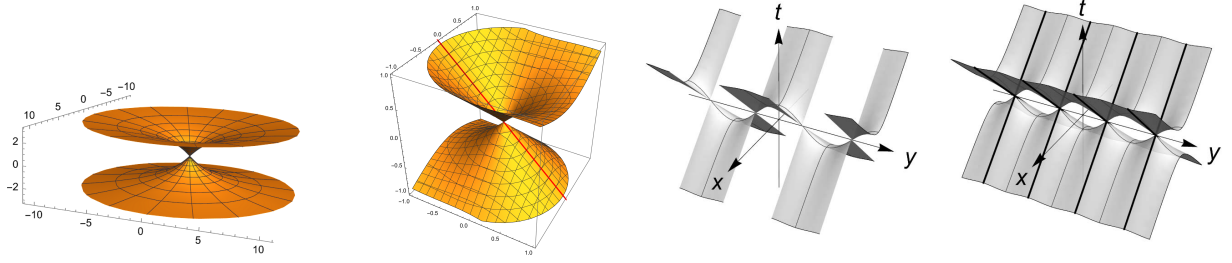


図 23. 楕円的カテナイド (左端), 放物的カテナイド (中央左), 双曲的カテナイド (中央右) と双曲的カテナイドの像の解析的拡張 (右端)

- (1) 楕円的カテナイド $f_E(u, v) := (u \cos v, u \sin v, \sinh u)$,
- (2) 放物的カテナイド $f_P(u, v) := \left(\frac{u^3}{3} - uv^2 + u, -2uv, \frac{u^3}{3} - uv^2 - u \right)$,
- (3) 双曲的カテナイド $f_H(u, v) := (\sinh v \cos u, u, \cosh v \cos u)$.

楕円的カテナイドの像は解析的な拡張を持たないが, 放物的カテナイドの像と双曲的カテナイドの像は解析的な拡張をもつことを示す: 実際, 写像 f_E の像は, 以下の陰関数表示

$$(3.3) \quad \text{Im}(f_E) = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}_1^3; x^2 + y^2 = (\sinh^{-1} t)^2\}.$$

をもち, 写像 f_P と f_H の像は, 以下の表示をもつ.

$$\text{Im}(f_P) \cup \mathcal{L} = \mathcal{P}, \quad \overline{\text{Im}(f_H) \cup T(\text{Im}(f_H))} = \mathcal{H}.$$

ここで $T: \mathbb{R}_1^3 \ni (x, y, t) \mapsto (x, -y, -t) \in \mathbb{R}_1^3$ は合同変換であり,

$$(3.4) \quad \mathcal{P} := \{(x, y, t) \in \mathbb{R}_1^3; 12(x^2 - t^2) = (x - t)^4 - 12y^2\} \supset \mathcal{L} := \{(t, 0, t); t \in \mathbb{R}\},$$

$$(3.5) \quad \mathcal{H} := \{(x, y, t) \in \mathbb{R}_1^3; t^2 - x^2 = \cos y\}.$$

である. いま $\mathbb{R}^3$ の部分集合 S が与えられ, $\mathbb{R}^3$ 上で定義された実解析関数の零点集合に一致しているとすると, S は解析的な拡張を持たないことが示される. したがって, 表示 (3.3), (3.4) および (3.5) から次のことがわかる.

Fact 3.7. 楕円的カテナイドの像は解析的な拡張を持たない. $\mathbb{R}_1^3$ の部分集合 $\mathcal{P}$ と $\mathcal{H}$ は錐的特異点をもち, それぞれ放物的カテナイド f_P と双曲的カテナイド f_H の像の解析的な拡張を与える.

結果的に放物的カテナイド f_P の像は単に閉包をとることで, 解析的な拡張が得られる. 一方, 双曲的カテナイド f_H の像は合同変換で倍化し, さらに閉包をとることで漸く解析的な拡張が得られたことになる. このように, 時空の平均曲率一定曲面は非自明な解析的な拡張をもつことが



図 24. Osgood 写像の像と，3 次元 de Sitter 時空の平均曲率 1 のカテノイド型の曲面

ある．大抵の場合，与えられた解析写像の像に対して適切な解析的拡張をもつ場合には，その写像の性質を個々に調べることで「解析的拡張」が見いだされることが多いが，一方，その解析的拡張が，これ以上の解析的拡張をもたないことを判定することはさらに難しい．例えば

$$F(u, v) := (u, uv, uve^v) \quad (u, v \in \mathbb{R})$$

は $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への実解析写像を与え，**Osgood の写像**とよばれる．この F の像としての曲面は，定義域では v -軸が特異点集合だが，像では原点 $(0, 0, 0)$ が v -軸の像に一致し，特異点が孤立して見える曲面を与える（図 24 左）．この曲面は等長変換を用いて，（図 24 中央）のような拡張を有するが，残念なことに， $F(\mathbb{R}^2)$ との継ぎ目は C^∞ 級にはなるが，実解析写像にはならない．すると「 F の像は本当に実解析的な拡張を持たないのだろうか」という疑問が生ずる（答は後述べるように Yes である）． F の特異点については，Osgood 自身により， F の像はいかなる実解析関数の零点にもなり得ないことが示されており， F の像は本当に実解析的な拡張を持たないことの判定には上記の極大カテノイド f_P と f_H のときの方法は使えない．一方，図 24 右の曲面は，3 次元 de Sitter 空間の平均曲率一定曲面 $\mathbb{R}^3$ への射影として得られる実解析的な写像の像であるが，ぐるぐる巻き付くような振る舞いをし，解析的な拡張があるかどうか式や絵を見ただけで直ぐにはわからない．筆者は以下の目標を実現すべく，藤森氏（広島大），川上氏（金沢大），國分氏（東京電大），Rossman 氏（神戸大），山田氏（東工大），Yang 氏（高麗大）と一緒に現在研究中である．

（目標）実解析的な写像の像が，よい特異点しか許容せず，弱い properness をもてば，その写像の像は，非自明な解析的な拡張を持たない．

実際，論文 [3] において，写像が高々錐的な特異点をもつ場合については目標を達成しており，その場合の系として図 24 で紹介した 3 次元 de Sitter 時空の平均曲率一定曲面が解析的拡張を持たないことは証明済みである．

現在，取り組んでいるのは，より一般に m 次元の実解析多様体 M^m から n 次元の実解析多様体 N^n ($n \geq m \geq 1$) への実解析写像の像として与えられる N^n の部分集合について目標を実現することだが，現段階で Osgood 写像の像については，解析的拡張を持たないことの証明には成功している．

参考文献

- [1] D. Bleeker and L. Wilson, *Stability of Gauss maps*, Illinois J. of Math. **22** (1978) 279–289.
- [2] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of maximal surfaces*, Math. Z., **259** (2008), 827–848.

- [3] S. Fujimori, Y. Kawakami, M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Analytic extensions of constant mean curvature one geometric catenoids in de Sitter three space*, Differential Geometry and its Applications **84** (2022) 101924.
- [4] T. Fukui, *Local differential geometry of cuspidal edge and swallowtail*, Osaka J. Math. **57** (2020), 961–992.
- [5] T. Fukui, R. Kinoshita, D. Pei, M. Umehara and H. Yu, *Cuspidal edges and generalized cuspidal edges in the Lorentz-Minkowski 3-space*, preprint.
- [6] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, *Intrinsic properties of singularities of surfaces*, International Journal of Math. **26** (2015) 1540008 (34 pages).
- [7] A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara, and K. Yamada, *Isometric deformations of wave fronts at non-degenerate singular points*, Hiroshima Math. J. **50** (2020), 269–312.
- [8] A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, *Duality on generalized cuspidal edges preserving singular set images and first fundamental forms*, Journal of Singularities **22** (2020), 59–91.
- [9] A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, *Curved foldings with common crease and crease patterns*, Advances in Applied Mathematics **121** (2020), 102083.
- [10] M. Kossowski, *The Boy-Gauss-Bonnet theorem for C^∞ -singular surfaces with limiting tangent bundle*, Ann. Global Anal. Geom. **21** (2002), 19–28.
- [11] M. Kossowski, *Realizing a singular first fundamental form as a nonimmersed surface in Euclidean 3-space*, J. Geom. **81** (2004), 101–113.
- [12] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math. **221** (2005), 303–351.
- [13] R. Langevin, G. Levitt and H. Rosenberg, *Classes d’homotopie de surfaces avec rebroussements et queues d’aronde dans $\mathbb{R}^3$* , Canad. J. Math. **47** (1995) 544–572.
- [14] 梅原雅顕, 「特異点をもつ曲面の微分幾何学」, 数学のたのしみ「特異点の世界：その広さと豊かさ」(上野健爾, 砂田利一, 新井仁之 編集), 日本評論社 (2005), 50–64.
- [15] 梅原 雅顕・山田光太郎共著, 曲線と曲面 (改訂版) -微分幾何的アプローチ- 裳華房; 改訂版 (2015).
- [16] 梅原 雅顕・佐治 健太郎・山田 光太郎・共著, 特異点をもつ曲線と曲面の微分幾何学 (現代数学シリーズ), 丸善出版 (2017).
- [17] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Geometry of fronts*, Ann. of Math. **169** (2009) 491–529.
- [18] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Coherent tangent bundles and Gauss-Bonnet formulas for wave fronts*, Journal of Geometric Analysis (2012) 22:383–409.
- [19] H. Whitney, *The singularities of a smooth n -manifold in $(2n - 1)$ -space*, Ann. of Math. **45** (1944), 247–293.

(梅原雅顕 (東京工業大学・情報理工学院)) 東京工業大学・情報理工学院, 数理・計算科学系
 Email address: umehara@c.titech.ac.jp