

K3 曲面上の複素力学系*

岩崎 克則†

2024 年 11 月 30 日講演

概要

K3 曲面上の正則自己同型のなす複素力学系について考察する．特に位相的エントロピーが正で、回転領域と呼ばれる不変集合をもつ K3 曲面自己同型を構成する方法を与える．一般超幾何微分方程式のモノドロミー群をモデルとする超幾何群や、クライン特異点の特異点解消と非線型写像の同変線型化等が、この構成にどのように係わるかについて解説する．

1 はじめに

コンパクト複素多様体 X の正則自己同型 $f : X \rightarrow X$ を考える．写像 f の反復合成の複雑さを位相的に測る不変量として、位相的エントロピー $h_{\text{top}}(f)$ という概念がある．一方、エルゴード理論的には、 f の反復合成の終局状態は f によって不変に保たれる確率測度 μ によって表現・分類される． μ の測度論的エントロピー $h_{\mu}(f)$ はその複雑さを測る尺度である．任意の不変確率測度 μ に対して不等式 $h_{\mu}(f) \leq h_{\text{top}}(f)$ が成立することが知られている．これを変分原理という．変分原理において等号を実現する不変測度 μ を最大不変測度という．これについては、多重ポテンシャル論やカレントの交叉理論を用いて構成する方法などが知られている．また、 f の作用によって保存される X の部分集合—不変部分集合—を分類したり、その性質を調べたりすることも、力学系における重要なテーマである．

一般に、位相的エントロピーを、その定義に基づいて直接的に計算することはむずかしい．しかし、空間や写像が“よい”性質をもつときには、より計算しやすいコホモロジー論的な量に還元することができる．次の定理はその一例である．

定理 1.1 (Gromov-Yomdin [9, 32]) Kähler 多様体の正則自己同型 $f : X \rightarrow X$ に対して、

$$h_{\text{top}}(f) = \log \lambda(f), \quad \lambda(f) = (\text{誘導線型写像 } f^* : H^*(X) \rightarrow H^*(X) \text{ のスペクトル半径})$$

が成り立つ．数 $\lambda(f)$ を f の力学次数という．

位相的エントロピーが正であることは、力学系がカオス的であることの一つの証拠であると考えられている． $f : X \rightarrow X$ がコンパクト複素曲面の正則自己同型であるときは、Enriques-Kodaira の分類に沿って次の定理が知られている．

*MSC: 14J28, 14J50, 33C80. Keywords: K3 surface, complex dynamics, automorphism, entropy, rotation domain, Siegel disk, hypergeometric group, Kleinian singularity, equivariant linearization.

†〒 060-0810 札幌市北区北 10 条西 8 丁目、北海道大学大学院理学研究院数学部門

定理 1.2 (Cantat [5]) コンパクト複素曲面 X が正の位相的エントロピー $h_{\text{top}}(f) > 0$ の正則自己同型 $f: X \rightarrow X$ を許すならば、 X は 2 次元複素トーラス、有理曲面、K3 曲面、または Enriques 曲面のいずれかである。

以下では、単にエントロピーと言え、位相的エントロピーを指すものとし、 $h_{\text{top}}(f)$ を単に $h(f)$ と記す。定理 1.2 の分類のうち、トーラス上の力学系は古典的であり、取り立てて新しく研究することはない。正エントロピーの有理曲面自己同型の構成については、McMullen [21], Uehara [31] などを参照せよ。本稿では K3 曲面の場合—ただし、非射影的な場合—を考察する。なお、Enriques 曲面は、射影的 K3 曲面を不動点のない位数 2 の群で割った商空間として表せるから、その上の力学系は射影的 K3 曲面上の力学系に帰着できる。

さて、K3 曲面上の正エントロピーをもつ力学系の研究は、Cantat [6], McMullen [20] 等により始まった。前者はエルゴード理論的な研究を展開し、後者は Siegel 円板という不変集合をもつ K3 曲面自己同型の構成に成功した。その後、Oguiso [25], McMullen [22, 23] などの研究が続く。一方、有理曲面上の力学系においては、Bedford-Kim [2, 3] が回転領域をもつ正則自己同型の構成を行った。上述の Siegel 円板は、階数 2 の回転領域に属している。

さて、以上とはまったく独立なテーマとして、Levelt [18], Beukers-Heckman [4] 等による超幾何群の話がある。これは、一般超幾何微分方程式のモノドロミー群をモデルとする行列群である。特に [4] は、有限超幾何群を特徴付けることにより、一般超幾何微分方程式の代数関数解を分類した。最近、Iwasaki-Takada [12] は、K3 曲面上の力学系と超幾何群という一見まったく無関係に見える 2 つのテーマを結び付けた。すなわち、ある種の無限超幾何群とそれに付随する格子を用いて、正エントロピーの K3 曲面自己同型を構成する方法—超幾何群の方法—を開発した。その応用として、Iwasaki-Takada [13] は、Siegel 円板をもつ K3 曲面自己同型を数多く構成した。この構成は、すべての可能な Picard 数に亘っている。さらに進んで Iwasaki [11] は、回転領域をもつ K3 曲面自己同型を構成する方法を与えた。そのために [11] は、超幾何群の方法の応用に加えて、非線型写像の群作用に関する同変線型化の手法を開発している。本稿の目的は、論文 [11, 12, 13] の概要を紹介することである。

2 回転領域

複素力学系において特徴的な不変集合である回転領域について説明する。そのためにまず、有界領域における正則自己同型群の構造に関する H. Cartan の理論 [7] を思い出す。

定理 2.1 有界領域 $D \subset \mathbb{C}^n$ の正則自己同型群 $\text{Aut}(D)$ にコンパクト開位相を与えると、局所コンパクト Lie 群となる。1 点 $p \in D$ の固定化部分群 $\text{Aut}_p(D)$ はコンパクト Lie 群となる。

証明の要点は次の通りである。 D が有界領域であることから $\text{Aut}(D)$ は正規族をなす。このことから、写像列の極限操作により D 上の正則ベクトル場のなす有限次元実 Lie 環を構成できる。その積分多様体をとることで、 $\text{Aut}(D)$ に Lie 群としての実解析アトラスを導入できる。

さて $f: X \rightarrow X$ をコンパクト複素曲面 X の正則自己同型とする。反復合成族 $\{f^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ が同程度連続となる点全体のなす開集合 $\mathcal{F}(f) \subset X$ を f の Fatou 集合、その各連結成分を Fatou 成分という。Fatou 集合の補集合 $\mathcal{J}(f)$ を f の Julia 集合という。力学系において Julia 集合

は軌道の“あばれる君”が棲むところ、対して Fatou 集合はおとなしい方々の居場所である．ここで U を f -不変な Fatou 成分とし、同相変換群 $\text{Homeo}(U)$ にコンパクト開位相を与える．反復合成族 $\mathcal{F} = \{(f|_U)^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ の $\text{Homeo}(U)$ における導集合を $\mathbb{T}$ とおく．このとき、 $\mathbb{T}$ は局所コンパクト可換 Lie 群となる．さらに f が 1 点 $p \in U$ を固定するならば、 $\mathbb{T}$ はコンパクト可換 Lie 群となる、従って $\mathbb{T}$ の単位元を含む連結成分は実トーラスとなる．証明の要点は、 U が f の Fatou 成分であることから $\mathcal{F}$ が正規族をなすことであり、その後の流れは H. Cartan の定理 (定理 2.1) の証明と同様である．

定義 2.2 コンパクト複素曲面 X の正則自己同型 $f: X \rightarrow X$ の Fatou 成分 U が階数 d の回転領域 であるとは、 $f(U) = U$ であって、制限写像 $f|_U$ の反復合成が U 上に上記の意味で実 d 次元トーラス作用を誘導することである．なお、 f をその m 回反復合成 f^m に置き換えることにより、周期 m の回転領域を定義することができる．

定理 2.3 (Bedford-Kim [3]) X がコンパクト Kähler 曲面であり、 f が正の位相的エントロピーをもつならば $d = 1, 2$ である．

Siegel 円板は階数 2 の回転領域に属する．ここで Siegel 円板とは、無理数回転をモデルとする不変集合のことである．より詳しい定義を述べよう． $\mathbb{D}$ を $\mathbb{C}$ 内の単位開円板、 $S^1 := \partial\mathbb{D}$ を単位円周とする．また $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in S^1 \times S^1$ とする．写像

$$F: \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \times \mathbb{D}, \quad (z_1, z_2) \mapsto (\alpha_1 z_1, \alpha_2 z_2)$$

が無理数回転であるとは、 F の反復合成が $S^1 \times S^1$ 上に稠密な軌道をもつことである．これは対 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ が乗法的独立であること、すなわち

$$k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \text{ が } \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} = 1 \text{ をみたすならば } k_1 = k_2 = 0 \text{ である} \quad (1)$$

ことと同値である．正則自己同型 $f: X \rightarrow X$ が Siegel 円板 $(U, p) \subset X$ をもつとは、 $f(p) = p$, $f(U) = U$ であって、制限写像 $f|_{(U,p)}$ がある無理数回転 $F|_{(\mathbb{D} \times \mathbb{D}, 0)}$ に双正則共役となることである．このとき、点 p を Siegel 円板 U の中心とよぶ．

曲面 X が有理曲面の場合、回転領域の構成は Bedford-Kim [2, 3] により論じられた．彼らは、具体式で与えられた $\mathbb{P}^2$ の双有理変換の族を何度かブローアップして、エントロピー正の有理曲面自己同型の族を作った．その中に階数 1 の回転領域をもつものがあり、さらに階数 1 と階数 2 の回転領域が共存する場合があることも発見した．彼らの例では、階数 1 の領域の中心はすべて不変曲線の上にあり、階数 2 の領域の中心はすべて不変曲線の外にあるようである．それでは K3 曲面の場合はどうなるだろうか？ というのが本稿の主題である．回転領域をもつ K3 曲面は、自然な設定の下では超越的となり、空間も写像も具体的な数式を用いて表示できるとは期待できない．そこで、より間接的な方法が必要となる．なお K3 曲面上の Siegel 円板は、McMullen [20] により初めて構成された．最近 Iwasaki-Takada は、[12] において超幾何群の方法を導入し、[13] において Siegel 円板をもつ K3 曲面自己同型を多数構成した．

3 K3 曲面と K3 構造

至るところ零でない正則 2 次微分形式をもつ単連結なコンパクト複素曲面を K3 曲面という。K3 曲面は 3 名の数学者 Kummer, Kähler, Kodaira の名前に因んで Weil により名付けられた。K3 曲面論の詳しい解説は、例えば Huybrechts [10] を参照のこと。

K3 曲面 X の整数係数 2 次コホモロジー群 $H^2(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{22}$ に交叉形式を与えると、符号数 $(3, 19)$ のユニモジュラ偶格子となる。このような格子を K3 格子という。K3 格子は同型を除いて一意的に定まる。Siu [28] により、任意の K3 曲面は Kähler であり、従って Hodge 分解

$$H^2(X, \mathbb{C}) = H^{2,0}(X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X), \quad \text{符号数 } (1, 0) \oplus (1, 19) \oplus (1, 0)$$

をもつ。ここで $H^{2,0}(X)$ は零点をもたない正則 2 次微分形式 η_X で張られる。 $H^{1,1}(X)$ の実部 $H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X) := H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{1,19}$ は実 20 次元 Minkowski 空間である。その中の錐

$$\mathcal{K}_X := \{[\omega] \in H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X) \mid \omega \text{ は } X \text{ 上の Kähler 形式}\}$$

を Kähler 錐という。時空の時間的部分 $\{x \in H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X) \mid (x, x) > 0\}$ は 2 つの連結成分—未来と過去—に分れる。そのうち $\mathcal{K}_X$ を含む方を正錐とよび $\mathcal{C}_X$ と表す。また、

$$\text{Pic}(X) := H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbb{Z})$$

を X の Picard 格子という。その階数 $\rho(X)$ を X の Picard 数とよぶ。これは 20 以下の非負整数となる。Picard 格子のなかにルート系 Δ_X および正ルートの集合 Δ_X^+ が

$$\Delta_X := \{y \in \text{Pic}(X) \mid (y, y) = -2\}, \quad \Delta_X^+ := \{y \in \Delta_X \mid y \text{ は正の因子}\}$$

により定まる。このとき Kähler 錐は Δ_X^+ に対応する Weyl の部屋

$$\mathcal{K}_X = \{x \in \mathcal{C}_X \mid \text{任意の } y \in \Delta_X^+ \text{ に対して } (x, y) > 0\}$$

であることが知られている。以上のデータを抽象化することにより K3 構造の概念をえる。

K3 格子 L 上の K3 構造とは、 L 上に次の 3 つのデータを指定することである。

- Hodge 構造 $L_{\mathbb{C}} = H^{2,0} \oplus H^{1,1} \oplus H^{0,2}$,
- 正錐 $\mathcal{C} \subset H_{\mathbb{R}}^{1,1} := H^{1,1} \cap L_{\mathbb{R}}$,
- 正ルートの集合 $\Delta^+ \subset \Delta$.

ここで Hodge 構造が与えられれば、Picard 格子 $\text{Pic} := H^{1,1} \cap L$ 、およびルート系

$$\Delta := \{y \in \text{Pic} \mid (y, y) = -2\}$$

が定まることに注意する。さらに正ルートの集合 Δ^+ に付随する “Kähler 錐” が

$$\mathcal{K} := \{x \in \mathcal{C} \mid \text{任意の } y \in \Delta^+ \text{ に対して } (x, y) > 0\}$$

により定まる。このようにして、抽象的な K3 格子上の抽象的な K3 構造という概念が定まる。

さて、任意の K3 曲面 X は K3 構造を定め、 X の自己同型は K3 構造を保つ。逆に Torelli 型の定理と周期写像の全射性という K3 曲面論の基本定理 ([10] 等参照) から次が成り立つ。

定理 3.1 与えられた K3 格子 L に対して, L 上の任意の K3 構造は, 同型を除き唯一のマーク付き K3 曲面 (X, ι) によって実現される. ここでマークとは, 格子同型 $\iota: H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow L$ のことである. さらに, 与えられた K3 構造を保つ任意の格子自己同型 $F: L \rightarrow L$ は, 同型を除いて唯一の K3 曲面自己同型 $f: X \rightarrow X$ によって実現される. すなわち, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} H^2(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\iota} & L \\ f^* \downarrow & & \downarrow F \\ H^2(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\iota} & L \end{array}$$

が成り立つ. 正則自己同型 f を格子同型 F の持ち上げという.

従って, K3 曲面自己同型の構成は, K3 構造を保存する格子自己同型の構成に帰着する.

K3 格子 L に Hodge 構造 $L_{\mathbb{C}} = H^{2,0} \oplus H^{1,1} \oplus H^{0,2}$ が与えられているとする. Hodge 構造を保つ格子同型 $F: L \rightarrow L$ を Hodge 等長変換という. さらに F が正錐を正錐に写すとき, 正の Hodge 等長変換という. 正の Hodge 等長変換は次の 3 つの型に分類される.

- (E) 楕円型: F は正錐の内部の少なくとも 1 本の直線を保つ. このとき, F のすべての固有値は 1 の冪根である.
- (P) 放物型: F は光錐 (正錐の境界) 上の唯 1 本の直線を保つ. このとき, F のすべての固有値は 1 の冪根である.
- (H) 双曲型: F は $\lambda > 1$ なる固有値 $\lambda^{\pm 1}$ をもち, 他の固有値の絶対値は 1 である. このとき, λ は Salem 数であり, F の $\lambda^{\pm 1}$ -固有空間は光錐上の 2 本の直線である.

正エントロピーの K3 曲面自己同型は, 定理 3.1 を通して双曲型の Hodge 等長変換に由来する. なお Salem 数については, 第 4 節を参照のこと.

4 K3 曲面自己同型

K3 曲面自己同型 $f: X \rightarrow X$ を考える. 定理 1.1 により f のエントロピー $h(f)$ は

$$h(f) = \log \lambda, \quad \lambda = \log(\text{誘導写像 } f^*: H^{1,1}(X) \rightarrow H^{1,1}(X) \text{ のスペクトル半径})$$

により与えられる. 誘導写像 $f^*: H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$ の固有多項式を $\chi(z)$ と表す. これは 22 次整数係数モニック多項式である. このとき, λ および $\chi(z)$ は次のように記述される.

- $h(f) = 0$ のとき, $\lambda = 1$ であり, $\chi(z) = C(z)$,
- $h(f) > 0$ のとき, λ は Salem 数であり, $\chi(z) = S(z) \cdot C(z)$ と因数分解する.

ただし $C(z)$ は円分多項式の積または 1 を表し, $S(z)$ は Salem 数 λ の最小多項式である.

Salem 数とは, 1 より大きな実代数的整数 λ であって, λ^{-1} と Galois 共役, $\lambda^{\pm 1}$ 以外の全ての共役数が単位円周 S^1 上に乗っている数のことである. ここで, 古典的な定理を思い出そう.

定理 4.1 (Kronecker) ζ が 1 の冪根であるための必要十分条件は, 自分自身を含む ζ のすべての共役数が単位円周 S^1 上に乗っていることである.

定理 4.1 に鑑みると, Salem 数は 1 の冪根の次に基本的な代数的整数であるといえる. 4 以上の各偶数 n に対し, n 次 Salem 数は可算無限個あり, 小さい順に

$$1 < \lambda_1^{(n)} < \lambda_2^{(n)} < \cdots < \lambda_k^{(n)} < \cdots \rightarrow +\infty$$

と並べられる. Salem 数の最小多項式を Salem 多項式という. Salem 多項式は偶数次の回文多項式である. Salem 数や Salem 多項式については Smyth [29] を参照のこと.

例 4.2 Lehmer 数 $\lambda_L \approx 1.17628$ は今までに知られている最小の Salem 数であり, 最小多項式

$$S_L(z) = z^{10} + z^9 - z^7 - z^6 - z^5 - z^4 - z^3 + z + 1$$

をもつ ([17] 参照). Lehmer 数はすべての Salem 数の最小値を与えると予想されている.

K3 曲面 X 上の至るところ零でない正則 2 次微分形式 η_X に対して,

$$f^*\eta_X = \delta(f)\eta_X$$

をみたす絶対値 1 の複素定数 $\delta(f) \in S^1$ が存在する. これを自己同型 $f : X \rightarrow X$ の捩れ数 (twist number) という. 捩れ数 $\delta(f)$ はエントロピー $h(f)$ と共に f の力学系の重要な不変量となる. $\delta(f)$ は 1 の冪根, またはある Salem 数 λ の Galois 共役数となる. 以後われわれは, 以下の条件をみたす K3 曲面自己同型を考察する.

設定 4.3 K3 曲面自己同型 $f : X \rightarrow X$ は以下の 2 条件をみたすとする.

(A1) 捩れ数 $\delta(f)$ はある Salem 数 λ の Galois 共役数である.

(A2) Picard 格子 $\text{Pic}(X)$ は交叉形式に関して非退化である.

K3 曲面 X が非射影的のとき, $\text{Pic}(X)$ は交叉形式に関して退化することがありえる. 条件 (A2) はこの可能性を排除している. 設定 4.3 からの帰結として, 次が得られる.

- X は非射影的で, f のエントロピーは $h(f) = \log \lambda > 0$ である.
- Picard 数 $\rho(X)$ は 0 以上 18 以下の偶数である.
- X 内の任意の既約曲線は (-2) -曲線であり, その個数は 0 個以上 $\rho(X)$ 個以下である.

X 内のすべての (-2) -曲線の合併 $\mathcal{E}(X)$ を X の例外集合とよび, その各連結成分を例外成分とよぶ. 例外成分 E の双対グラフ D は ADE 型の Dynkin 図形となる. E が f -不変であるとき, f は E 内の (-2) -曲線たちを置換するので, Dynkin 図形 D の自己同型

$$\sigma_f = \sigma_f(E) \in \text{Aut}(D)$$

を誘導する. なお, 例外成分の個数は有限であるので, ある自然数 m に対して f の m 回反復合成 f^m は, すべての例外成分を不変に保つことに注意する.

設定 4.3 の下で, K3 曲面自己同型 $f : X \rightarrow X$ の反復合成の力学系を考える. われわれのイメージは図 1 のような感じである. この図では, A_3 型と D_7 型の f -不変な例外成分が存在している. A_3 型の例外成分には, 安定曲線と不安定曲線が出入りしている. 例外集合 $\mathcal{E}(X)$ の外では Siegel 円板が回っている. D_7 型の例外成分は, 階数 1 の回転領域にすっぽりと含まれているのであろうか? このような疑問を心に持ちながら, 次の問題設定を行う.

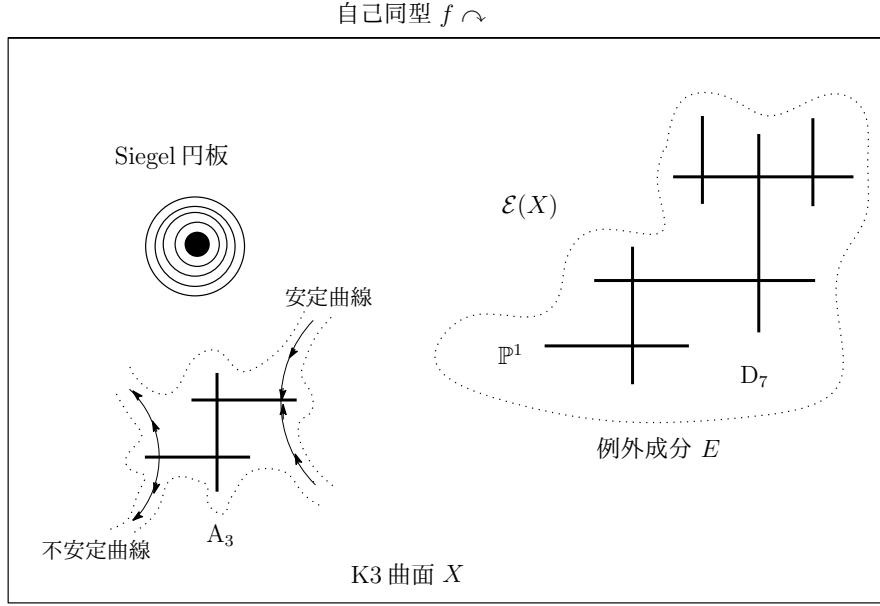


図 1: K3 曲面の例外成分と不変集合

問題 4.4 設定 4.3 の下で, 回転領域をもつ K3 曲面自己同型を構成せよ.

Siegel 円板をもつ, したがって階数 2 の回転領域をもつ K3 曲面自己同型の構成については論文 [12, 13] でよく論じたから, ここでは特に階数 1 の回転領域をもつ, あるいは両者が共存する自己同型の構成に興味がある. いずれにしても, 回転領域について論じるときは, その中心となる点に着目し, その点の周りで非線型写像を線型化し, 標準的な形にもって行くことがポイントとなる. そこで次節では, 非線型写像の線型化に視点を移すことにする.

5 非線型写像の線型化

局所双正則写像 $F : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ を考える. $\mathbb{C}^2$ の標準座標系を $z = (z_1, z_2)$ とする. 原点における F の Jacobi 行列を $J := F'(0)$ とおく. 局所双正則変換 $\Phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ で,

$$\Phi \circ F \circ \Phi^{-1} = J, \quad \Phi(0) = I \quad (2)$$

をみたすものを見つけよう. このような Φ を F の局所線型化変換という.

行列 J の固有値 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ を F の乗数という. ここで 2 重添字の集合

$$N := \{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid n_1 \geq 0, n_2 \geq 0, n_1 + n_2 \geq 2\}$$

を導入する. 乗数 α が非共鳴であるとは, 任意の $(n_1, n_2) \in N$ に対して

$$\alpha_j - \alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2} \neq 0, \quad j = 1, 2$$

となることをいう. 乗数 α が非共鳴のとき, 方程式 (2) の形式的幂級数解 $\Phi = \Phi(z)$ in $z = (z_1, z_2)$ が一意的に存在する. この形式解には小分母問題が絡み, その収束性が問題となる.

正数 $c > 0$ および $K > 0$ が存在して, 任意の $(n_1, n_2) \in N$ に対して,

$$|\alpha_j - \alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2}| \geq K(n_1 + n_2)^{-c}, \quad j = 1, 2$$

が成り立つとき, 乗数 α は Diophantine であるという. このとき, 次の Siegel 型線型化定理が成り立つ (いろいろのバージョンがあるが, 例えば Pöschel [26] を参照せよ).

定理 5.1 Jacobi 行列 J が対角化可能であり, 乗数 α は Diophantine 条件をみたすとする. このとき, 形式解 $\Phi(z)$ は収束し, 写像 F の原点周りの局所線型化 $\Phi \circ F \circ \Phi^{-1} = J$ を与える.

Diophantine 条件を検証することはむずかしい. それに比べると, 非共鳴性の検証の方がやさしい. Diophantine ならば非共鳴であることは明かであるが, 逆は一般には正しくない. しかし, 乗数に代数性を課するとき, 超越数論の結果 — Baker [1] 等を参照 — より次が成り立つ.

定理 5.2 乗数 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ が $S^1 \times S^1$ に属する代数的数の組であるとする. このとき α が非共鳴ならば Diophantine である.

定理 5.2 により定理 5.1 が使いやすいものとなる. 以下でもそのご利益に与かることになる.

6 有限群作用と同変線型化

G を $SU(2)$ の非自明な有限部分群とする. 第 5 節と同様に $F : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ を局所双正則写像とし, $J := F'(0) \in GL_2(\mathbb{C})$ を F の Jacobi 行列とする. 写像 F が G -同変であるとは, 任意の元 $g \in G$ と, 原点に十分近い任意の点 $z \in \mathbb{C}^2$ に対して, $(F \circ g \circ F^{-1})(z)$ が点 z の G -軌道に留まることをいう. 写像 F が G -同変のとき, Jacobi 行列 J は次の性質をもつ.

- J は G の $GL_2(\mathbb{C})$ における正規化群 N_{GL} に属する.
- 任意の $g \in G$ に対して $F \circ g \circ F^{-1} = JgJ^{-1}$ となる.

定理 6.1 ([11]) G を $SU(2)$ の非自明な有限部分群とし, 局所双正則写像 $F : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ は G -同変であるとする. さらに,

- Jacobi 行列 J は対角化可能である,
- 乗数 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ は $S^1 \times S^1$ に属する非共鳴な代数的数の組である

とすると, 次の 2 条件をみたす局所双正則変換 $\Phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ が一意的に存在する.

- $\Phi \circ F \circ \Phi^{-1} = J, \quad \Phi(0) = I,$
- Φ は任意の $g \in G$ と可換, すなわち $\Phi \circ g = g \circ \Phi,$

さらに G が位数 2 の群でない限り, 仮定 (i) は自動的に成立つ.

例 6.2 J の行列式を考えると $\det J = \alpha_1 \alpha_2$ であるから, 2 つの乗数 α_1, α_2 を $\sqrt{\det J} \cdot \alpha^{\pm 1}$ と表すことができる. この表示のもと, α が 1 の冪根であり, $\det J$ が絶対値 1 の代数的数であるが 1 の冪根ではないとき, 定理 6.1 の仮定 (ii) が成り立つ.

7 特異点解消と線型モデル

第 6 節の設定の下で考える．行列 $J \in N_{\text{GL}}$ の $(\mathbb{C}^2, 0)$ への作用を，図式

$$\begin{array}{ccc} J \curvearrowright (\mathbb{C}^2, 0) + \eta_{\mathbb{C}^2} & & f_J \curvearrowright (X, E) + \eta_X \\ G \text{ で割る } \downarrow & & \downarrow \text{最小特異点解消} \\ (\mathbb{C}^2, 0)/G & \xlongequal{\quad} & (S, p) + \eta_S \end{array} \quad (3)$$

に沿って，Klein 特異点 $(\mathbb{C}^2, 0)/G$ の最小特異点解消 (X, E) へ誘導する．誘導写像 $f_J : (X, E) \rightarrow (X, E)$ は例外集合 E を保つ X の正則同型となる．上の図式 (3) において $\eta_{\mathbb{C}^2} := dz_1 \wedge dz_2$ は $\mathbb{C}^2$ 上の標準的 2 次微分形式である．商空間 $(\mathbb{C}^2, 0)/G$ は，あるアフィン代数曲面

$$S = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \mid u(x) = 0\}$$

と同型となる ($u(x)$ の具体形は [16, 19] 等を参照)．このとき， $\eta_{\mathbb{C}^2}$ は S 上の Poincaré 留数

$$\eta_S := \left. \frac{dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}{du} \right|_S$$

へ降下する．さらに η_S は特異点解消に沿って X 上の至るところ零でない正則 2-形式 η_X に持ちあがる．写像 $f_J : (X, E) \rightarrow (X, E)$ を行列 $J \in N_{\text{GL}}$ に付随する線型モデルとよぶ．

線型モデルの分析を行なおう．まず，誘導写像 f_J は $J \in N_{\text{GL}}$ の商群 N_{GL}/G における類のみによって定まる．2 次微分形式の振れについては，

$$J^* \eta_{\mathbb{C}^2} = (\det J) \eta_{\mathbb{C}^2}, \quad f_J^* \eta_X = (\det J) \eta_X$$

となる．例外集合 E は (-2) -曲線からなり， E の双対グラフ D は ADE 型の Dynkin 図形である． f_J は (-2) -曲線たちを置換し，Dynkin 自己同型 $\sigma_J \in \text{Aut}(D)$ を誘導する．写像 f_J が E にどのように作用するか，固定点の位置や，固定点における乗数の具体的決定を行うことができる．これは後に Lefschetz 型の不動点公式を適用するための下拵えとなる (第 9 節参照)．

さて，非線型正則自己同型 $f : (X, E) \rightarrow (X, E)$ が与えられたとする．その振れ数を $\delta(f)$ とおく．つまり $f^* \eta_X = \delta(f) \eta_X$ である． f から G -同変非線型写像 $F : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ を図式

$$\begin{array}{ccc} f \curvearrowright (X, E) + \eta_X & & F \curvearrowright (\mathbb{C}^2, 0) + \eta_{\mathbb{C}^2} \\ \text{例外集合を潰す } \downarrow & & \downarrow G \text{ で持上げ} \\ (S, p) + \eta_S & \xlongequal{\quad} & (\mathbb{C}^2, 0)/G \end{array} \quad (4)$$

に沿って誘導する．次に定理 6.1 に基づいて， F を Jacobi 行列 $J := F'(0) \in N_{\text{GL}}$ へ G -同変線型化する—ことができたとする； $\det J = \delta(f)$ であることに注意．このとき，図式 (3) に沿って行列 J に付随する線型モデル f_J へ移行することにより，非線型写像 f を例外集合 E の近傍で線型モデル f_J へ還元することができる．

上述のレシピがいつ実行可能になるかを考えよう．そのために，例外集合 E の双対グラフ D が ADE 型の Dynkin 図形となること，および写像 f は E 内の (-2) -曲線たちを置換し，Dynkin 自己同型 $\sigma_f \in \text{Aut}(D)$ を誘導することを思い出しておこう．

定理 7.1 ([11]) 捩れ数 $\delta(f)$ は 1 の冪根でない絶対値 1 の代数的数であるとする．例外集合

- E が A_n 型 ($n \geq 2$) かつ $\sigma_f \in \text{Aut}(A_n) \cong \mathbb{Z}_2$ が非自明のとき,
- E が D 型または E 型のとき (σ_f は何であつてもよい),

のいずれかの場合において, 写像 $f : (X, E) \rightarrow (X, E)$ から図式 (4) に沿って誘導された G -同変写像 $F : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ の Jacobi 行列 J の固有値は,

$$\sqrt{\delta(f)} \cdot \alpha^{\pm 1}, \quad \alpha \text{ は } 1 \text{ の冪根} \quad (5)$$

の形となる (例 6.2 参照). そして f は線型モデル $f_J \in G$ -同変線型化可能である.

注意 7.2 例外集合 E が A_n 型 ($n \geq 1$) で σ_f が自明のとき, 様々な現象が起こる. 式 (5) における数 α も 1 の冪根とは限らず, また E の周りの半局所的な情報からは定まらない. α の分析のためには, 空間全体にわたる大域的考察が必要となる.

8 K3 曲面の例外成分と回転領域

設定 4.3 の下で K3 曲面自己同型 $f : X \rightarrow X$ の力学系の考察に戻る. このとき, f によって不変に保たれる例外成分 $E \subset \mathcal{E}(X)$ は階数 1 または 2 の回転領域に含まれるだろうか? この問に答えるため, 以下では E の Dynkin 型を D とし, f が E 内の (-2) -曲線たちを置換することによって得られる D の Dynkin 自己同型を $\sigma_f(E) \in \text{Aut}(D)$ と表す.

結果 8.1 ([11]) 例外成分 E の Dynkin 型によって様子が異なる.

- E が D 型か E 型の例外成分のときは, 常に階数 1 の回転領域に含まれる.
- E が A 型の例外成分のときは, より多様な現象が起こる.
 - 階数 2 の回転領域に含まれる場合がある.
 - 階数 1 の回転領域に含まれる場合がある. $\sigma_f(E)$ が非自明なときは常にそうである.
 - 回転領域に含まれない場合がある. 例外成分に出入りする双曲型の安定曲線・不安定曲線が存在する場合などがそれに該当する.

この結果を得る手段の一つは, 不変例外成分 E の周りで非線型写像 $f : (X, E) \rightarrow (X, E)$ に第 7 節で導入した同変線型化を適用することである. E が D 型 E 型の場合, または A 型で $\sigma_f(E)$ が非自明の場合は定理 7.1 を用いることができる. E が A 型で $\sigma_f(E)$ が自明の場合は, より複雑な考察を要する (第 9 節参照). また, 結果 8.1 のすべての場合を網羅するような実例を構成する必要がある. これは, 超幾何群の方法 [12] で構成することになる (第 14 節参照).

ここで, 回転領域の中心における乗数と回転領域の階数の関係について論じておく. 正則自己同型 $f : X \rightarrow X$ の固定点 p における乗数を $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ と表す. ただし α_1, α_2 は絶対値 1 の代数的数であるとする. α が乗法的独立であるとは, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ が $\alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} = 1$ をみたすならば $k_1 = k_2 = 0$ となることであつた (条件 (1) 参照). そうでないとき, 乗法的従属という. α が共鳴的ならば乗法的従属である. 逆は一般に成り立たない. 点 p が例外集合 $\mathcal{E}(X)$ の外にあるときは, 点 p の近傍で写像 f の通常の意味での線型化を考える. 点 p が例外成分 E 上にあるときは, E の周りで f の同変線型化を考える. このとき次の 3 分法が成り立つ.

- (i) α が乗法的独立ならば, 点 p は階数 2 の回転領域の中心である.
- (ii) α が乗法的従属かつ非共鳴ならば, 点 p は階数 1 の回転領域の中心である.
- (iii) α が共鳴的ならば, 線型化がうまく適用できず, 結果が出せない.

例外成分 E が D 型か E 型の場合, または A 型で $\sigma_f(E)$ が非自明の場合, 必ず場合 (ii) が起こる. E が A 型で $\sigma_f(E)$ が自明の場合, または点 p が例外集合 $\mathcal{E}(X)$ の外にある固定点のときは, 場合 (i), (ii), (iii) のどれが起きるかは検証を要する. これについては, なにも手掛かりがないとお手上げになるので, 取りつく島を求めて乗数 α に対する作業仮説を導入する.

9 乗数に対する作業仮説と不動点公式

設定 4.3 の下で K3 曲面自己同型 $f: X \rightarrow X$ を考える. このとき f の振れ数 $\delta = \delta(f) \in S^1$ は Salem 数 λ に Galois 共役である. 点 $p \in X$ を f の周期 m の周期点, すなわち f の m 回反復合成 f^m の固定点とする. このとき $\det(df^m)_p = \delta^m$ であるから, 点 p における f^m の乗数 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ を $\delta^{m/2}\alpha^{\pm 1}$ と表すことができる. 数 $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ に関して, 次の作業仮説をおく.

仮説 9.1 有理数係数の有理式 $P(w) \in \mathbb{Q}(w)$ が存在して, 次をみたすとする.

$$\alpha + \alpha^{-1} = P(\delta^{1/2} + \delta^{-1/2}). \quad (6)$$

ただし $P(w)$ は, m が奇数ならば奇関数, m が偶数ならば偶関数とする.

仮説 9.1 の下で, 等式 $Q(w^2 - 2) = P(w)^2 - 2$ をみたす有理数係数の有理式 $Q(w) \in \mathbb{Q}(w)$ が一意的に定まる. このことより, $w \in \mathbb{R}$ のとき $-2 \leq Q(w) \leq +\infty$ となることに注意する; $\mathbb{R}$ 上で $Q(w)$ に極があるかもしれないので $+\infty$ の方も等号付きである. 等式 (6) は等式

$$\alpha^2 + \alpha^{-2} = Q(\delta + \delta^{-1}) \quad (7)$$

を導く. ここで, 実代数的整数 $\tau := \delta + \delta^{-1} \in (-2, 2)$ および $\rho := \lambda + \lambda^{-1} > 2$ を導入する. 数 τ, ρ を, それぞれ代数的単数 δ, λ のトレース (trace) という. このとき, 上記の注意から $Q(\tau) \geq -2$ および $Q(\rho) \geq -2$ であることに注意する.

結果 9.2 ([11]) 乗数 α が乗法的従属となるための必要十分条件 (*) を, 有理式 $Q(w)$ の形から有限回の操作で判定可能な条件として与えることができる.

(I) 条件 (*) が成り立たないとき, すなわち α が乗法的独立のとき,

- (a) $|Q(\tau)| \leq 2$ のとき, 点 p は階数 2 の回転領域の中心となる,
- (b) $Q(\tau) > 2$ のとき, 点 p は双曲型周期点となる.

(II) 条件 (*) が成り立つとき, すなわち α が乗法的従属のとき,

- (a) $|Q(\rho)| \leq 2$ のとき, α は常に非共鳴となり, 点 p は階数 1 の回転領域の中心となる,

- (b) $Q(\rho) > 2$ のとき, α が非共鳴となるための必要十分条件 (**) を, 有理式 $P(w)$ の形から有限回の操作で判定可能な条件として与えることができる. 条件 (**) が成り立つとき, 点 p は階数 1 の回転領域の中心となる. 条件 (**) が成り立たないときは, α が共鳴的になり, どのような現象が起こるのか, いまの方法では判定できない.

条件 (*) および (**) の詳細な記述については [11] を参照せよ. それでは, どうすれば仮説 9.1 を実現するような状況設定ができるであろうか? これについては 2 つの課題がある.

- (i) まず “よい” 固定点や周期点 $p \in X$ の存在を保証する必要がある.
- (ii) 次に点 p を中心として, 等式 (6) をみたす有理式 $P(w) \in \mathbb{Q}(w)$ の存在を保証し, さらにその具体形を求める必要がある.

課題 (i) については, Lefschetz 型の不動点公式を使う. しかし, 孤立固定点だけでなく, 固定曲線も現れ得るので, 古典的な Lefschetz の不動点公式では間に合わない. そこで, 斎藤秀司の不動点公式 [27] の Kähler 曲面版を用いる. 課題 (ii) については, Atiyah-Bott 型の正則不動点公式を使う. しかし, 孤立固定点も単純なものだけでなく, 重複度のあるものが現れるかもしれないので, 古典的な Atiyah-Bott の不動点公式では間に合わない. そこで, 重複度を許す Toledo-Tong の正則不動点公式 [30] を用いる. この公式には Grothendieck 留数が現れるので, その力学系的な取扱いを確立することも重要となる. 両公式について簡単に説明する.

斎藤秀司の不動点公式. $f: X \rightarrow X$ をコンパクト Kähler 曲面 X の正則写像とする.

$$L(f) := \sum_{j=0}^4 (-1)^j \operatorname{Tr}[f^* : H^j(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^j(X, \mathbb{C})]$$

を f の Lefschetz 数とすると, 斎藤秀司の不動点公式は次のように述べられる.

$$L(f) = \sum_{p \in X_0(f)} \mu_p(f) + \sum_{C \in X_I(f)} \chi_C \cdot \mu_C(f) + \sum_{C \in X_{II}(f)} \tau_C \cdot \mu_C(f). \quad (8)$$

ただし, $X_0(f)$ は写像 f の固定点の集合, $X_I(f)$ および $X_{II}(f)$ は写像 f の第 I 型および第 II 型の既約固定曲線の集合を表す. 粗くいうと, 曲線 C の近傍が f によって C の接方向に写されるのが第 II 型, そうでないのが第 I 型である. また χ_C は C の正規化の Euler 数, τ_C は C の自己交点数を表す. さらに $\mu_p(f)$ および $\mu_C(f)$ は, 固定点 p および固定曲線 C における f の局所指数であり, 環論的に定義される. この定義が公式の肝であるが, 説明に準備を要するので省略する. 原論文 [27], または論文 [12] の Appendix B を参照のこと. なお, 点 p が孤立固定点のとき, $\mu_p(f)$ は通常のリマン多様体の重複度と一致する. 公式 (8) は [15, 8] 等で力学系に応用された.

Toledo-Tong の不動点公式. $f: X \rightarrow X$ をコンパクト複素曲面 X の正則写像とする.

$$\mathcal{L}(f) := \sum_{j=0}^2 (-1)^j \operatorname{Tr}[f^* : H^j(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^j(X, \mathcal{O}_X)]$$

を f の正則 Lefschetz 数とすると, Toledo-Tong の不動点公式は次のように述べられる.

$$\mathcal{L}(f) = \sum_{p: \text{孤立固定点}} \nu_p(f) + \sum_{C: \text{固定曲線}} \nu_C(f).$$

ここで $\nu_p(f)$ は孤立固定点 p の周りの局所座標系 $z = (z_1, z_2)$ を用いて,

$$\nu_p(f) = \text{Res}_p \frac{dz_1 \wedge dz_2}{(z_1 - f_1(z))(z_2 - f_2(z))}, \quad f = (f_1(z), f_2(z)),$$

と定義される．ただし Res_p は点 p における Grothendieck 留数を表す．また λ_C を, 固定曲線 C の法線束 N_C への微分写像 df の制限写像の固有値とすると, $\nu_C(f)$ は

$$\nu_C(f) = \int_C \frac{\text{td}(TC)}{1 - \lambda_C \cdot \text{ch}(\check{N}_C)}$$

で与えられる．ただし td は Todd 類, ch は Chern 指標, $\check{N}_C$ は法線束 N_C の双対束を表す．Toledo-Tong の公式は, すべての固定曲線 C が滑らかであり, かつ $\lambda_C \neq 1$ であるという条件の下で成り立つ．

以上, 回転領域をもつ K3 曲面自己同型を得るための一つの方策を提案してきたが, これまでに述べたアイデア—あるいは皮算用—がうまくいくかたちで K3 曲面自己同型を構成するにはどうしたらよいだろう．第 3 節で述べたように, K3 曲面自己同型の構成は K3 構造を保存する K3 格子自己同型の構成に還元する．そこで後者の構成において, 作業仮説 9.1 など, われわれの目論みがすべて成功するような方法を開発する必要がある．そのために (偶然に!) 思いついたのが, 超幾何群の方法 [12] である．そのような次第で, 藪から棒ではあるが, 次節では超幾何微分方程式のモノドロミー群をモデルとする超幾何群の概念を導入する．

10 超幾何方程式と超幾何群

複素数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_{n-1} \in \mathbb{C}$ をパラメータとする z のべき級数

$${}_nF_{n-1} \left(\begin{matrix} \alpha_1, & \dots, & \alpha_n \\ \beta_1, & \dots, & \beta_{n-1} \end{matrix} \middle| z \right) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k \cdots (\alpha_n)_k}{(\beta_1)_k \cdots (\beta_{n-1})_k} \cdot \frac{z^k}{k!}$$

を一般超幾何級数という．ここで, $(\alpha)_k$ は Pochhammer 記号と呼ばれ, $k = 0$ のとき $(\alpha)_0 := 1$, $k \geq 1$ のとき $(\alpha)_k := \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+k-1)$ で定義される．この級数は, 線型微分方程式

$$\{\vartheta(\vartheta + \beta_1 - 1) \cdots (\vartheta + \beta_{n-1} - 1) - z(\vartheta + \alpha_1) \cdots (\vartheta + \alpha_n)\}f = 0 \quad (9)$$

をみたす．ただし $\vartheta := z(d/dz)$ である．これを一般超幾何微分方程式という．パラメータ α_i, β_j が一般のとき, 微分方程式 (9) は次の性質をもつ．

- Riemann 球面 $\mathbb{P}^1$ 上の Fuchs 型微分方程式で $z = 0, 1, \infty$ に確定特異点をもつ．
- 特異点 $z = 1$ の近傍において $n - 1$ 個の線型独立な正則局所解をもつ．

2 つ目の性質により $z = 1$ のまわりの局所モノドロミー行列 C は複素鏡映変換となる．すなわちランク条件 $\text{rank}(I - C) = 1$ をみたす．

領域 $\Omega := \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ において, 1 点 $z_0 \in \Omega$ を基点とし, 3 点 $z = 0, 1, \infty$ を回るループをそれぞれ $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty$ とする．これらを適切に向き付けておくと, Ω の基本群は,

$$\pi_1(\Omega, z_0) = \langle \gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty \mid \gamma_1 = \gamma_\infty^{-1} \gamma_0 \rangle = \langle \gamma_\infty, \gamma_0 \rangle$$

と表される．ループ $\gamma_\infty, \gamma_0, \gamma_1$ に沿う微分方程式 (9) の基本解のモノドロミー行列をそれぞれ A, B, C とすると，関係式 $\gamma_1 = \gamma_\infty^{-1}\gamma_0$ より $C = A^{-1}B$ が成り立つ．従って，ランク条件 $\text{rank}(I - C) = 1$ は $\text{rank}(A - B) = 1$ と同値である．行列 A, B で生成される群 $G = \langle A, B \rangle$ が微分方程式 (9) のモノドロミー群である．以上の状況を抽象化して，超幾何群の概念を得る．

定義 10.1 条件 $\text{rank}(A - B) = 1$ をみたす 2 つの行列 $A, B \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ で生成される行列群 $H = \langle A, B \rangle \subset \text{GL}_n(\mathbb{C})$ を超幾何群という．

超幾何群は，その単純な定義にもかかわらず，多様な群を含んでいる．以下では，超幾何群の基本的な性質をいくつか述べよう．行列 A, B の固有値の集合を，それぞれ $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_n\}$, $\mathbf{b} = \{b_1, \dots, b_n\}$ と表す．これらは重複度を考慮に入れた集合，すなわち多重集合である．

定理 10.2 (Beukers-Heckman [4]) 群 $H = \langle A, B \rangle$ が $\mathbb{C}^n$ に既約に作用するための必要十分条件は， A と B が共通の固有値をもたないこと，すなわち $\mathbf{a} \cap \mathbf{b} = \emptyset$ となることである．

今後は，明示的に断らなくても，常に H は既約と仮定する．

定理 10.3 (Levelt [18]) 群 H は $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ における共役を除いて $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ により一意的に決定される．すなわち H は rigid である．これより $H = H(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ と書くことが許される．

行列 A, B の固有多項式を $\varphi(z), \psi(z)$ とするとき， $H(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ を $H(\varphi, \psi)$ と書くこともできる．われわれの目的のためには，後者の書き方の方が便利ことが多い．

さて， $\mathbb{C}^n$ 上に超幾何群の作用で不変なエルミート形式がいつ存在するかを考えよう．そのために， $\mathbb{C}^\times$ における involution $a \mapsto a^\dagger$ を $a^\dagger := \bar{a}^{-1}$ で定める．また $\mathbf{a}^\dagger := \{a_1^\dagger, \dots, a_n^\dagger\}$ とおく．

定理 10.4 ([4]) $\mathbb{C}^n$ 上に超幾何群 $H(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ の作用で不変な非退化エルミート形式が存在するための必要十分条件は $\mathbf{a}^\dagger = \mathbf{a}$, $\mathbf{b}^\dagger = \mathbf{b}$ となることである．この条件が成り立つとき，不変エルミート形式は零でない実数の定数倍を除いて一意的に定まる．

定理 10.5 ([4]) 定理 10.4 で述べた不変エルミート形式が定符号であるための必要十分条件は， $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が単位円周 $S^1 \subset \mathbb{C}$ 上にあり interlace することである．すなわち， $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の元が 1 つずつ S^1 上に交互に並ぶことである．

定理 10.5 および Galois 理論により，超幾何群が有限群となる場合の特徴付けが得られる．

定理 10.6 ([4]) 超幾何群 $H(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ が有限群となるための必要十分条件は次で与えられる．

- 固有値 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ のすべてが 1 の冪根である．
- 任意の Galois 変換 $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ に対して， $\sigma(\mathbf{a})$ と $\sigma(\mathbf{b})$ は interlace する．

定理 10.6 の応用として，Beukers-Heckman [4] は一般超幾何方程式の代数函数解の分類を与えた．これは $n = 2$ の場合，すなわち Gauss 超幾何方程式に対する古典的な Schwarz リストの一般化である．定理 10.6 は有限超幾何群に関する結果であるが，われわれは無限超幾何群に注目する．そして，ある種の無限超幾何群の K3 曲面上の複素力学系への応用を与える．

11 超幾何群の基盤整備

超幾何群 $H = H(\varphi, \psi) = \langle A, B \rangle \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を考える．ただし $\varphi(z), \psi(z)$ は A, B の固有多項式である．第 10 節で述べた諸定理を固有多項式のことばで述べ直しておこう．

定理 11.1 群 H が既約であるための必要十分条件は，固有多項式 $\varphi(z)$ と $\psi(z)$ の終結式 $\mathrm{Res}(\varphi, \psi)$ の値が 0 でないことである．

定理 11.2 群 H は既約とする． H 不変エルミート形式が存在するための必要十分条件は，

$$z^n \bar{\varphi}(z^{-1}) = \bar{\varphi}(0) \cdot \varphi(z), \quad z^n \bar{\psi}(z^{-1}) = \bar{\psi}(0) \cdot \psi(z) \quad (10)$$

が成立つことである．ただし $\bar{\varphi}(z) := \overline{\varphi(\bar{z})}$ と定義し， $\bar{\psi}(z)$ も同様に定義する．

今後は常に定理 11.1 および定理 11.2 の状況を仮定する．等式 (10) において $z \rightarrow 0$ の極限をとると， $|\varphi(0)| = |\psi(0)| = 1$ を得る．行列 $C := A^{-1}B$ は複素鏡映変換であるから，

$$c := \det C = \frac{\psi(0)}{\varphi(0)} \in S^1 \quad (11)$$

は C の固有値である．これを特別な固有値 (distinguished eigenvalue) という．

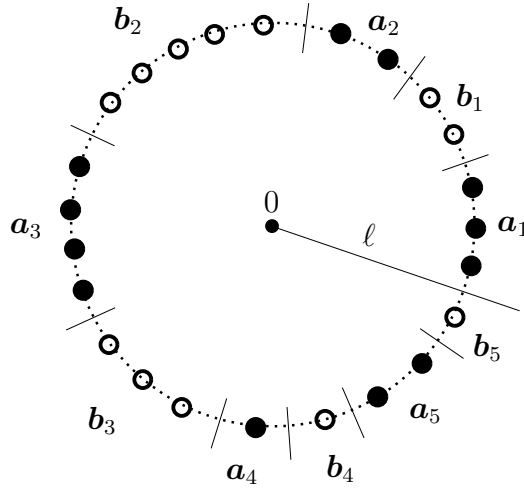


図 2: クラスター

さて H 不変エルミート形式の符号数を (p, q) とおく．このとき，指数 $p - q$ はどのようにして決まるだろうか．これについて述べるために，単位円周 S^1 上にある a の部分を a_{on} とおき， S^1 の外にある a の部分を a_{off} とおく．同様に b に対して b_{on} と b_{off} を定義する．図 2 に示した通り， S^1 上で a_{on} と b_{on} はお互いを交互に並ぶ“クラスター” $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ に分ける．

クラスターと指数 [12, §3]. 指数 $p - q$ を a と b の配置によって決める公式を作ることができる ([12, Theorem 3.2]). このうち $\pm(p - q)$ は S^1 上のクラスターの配置のみによって決まる．さらに $\pm$ の符号を決めるには a_{off} と b_{off} の情報が必要となる．上記の公式の局所版も存在する ([12, Proposition 3.5]). 後者は K3 格子上の Hodge 構造を考えるとときに必要となる．

実超幾何群 [12, §4]. 超幾何群 $H = H(\varphi, \psi)$ が実 (real) であるとは, $\varphi(z), \psi(z)$ が実多項式であることである. このとき式 (11) より, 特別な固有値は c は絶対値 1 の実数となるから $c = \pm 1$ である. 本稿では $c = -1$ を仮定する. $\varphi(0)$ と $\psi(0)$ も絶対値 1 の実数であるから, 必要なら $\varphi(z)$ と $\psi(z)$ を交換することにより, 以下を仮定することができる—以後そうする.

$$\varphi(0) = -1, \quad \psi(0) = 1.$$

さて $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ を C の (-1) -固有ベクトルとし, 自己内積を $(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = 2$ と規格化すると,

$$C\mathbf{v} = \mathbf{v} - (\mathbf{v}, \mathbf{r})\mathbf{r}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$$

となり, C は $\mathbf{r}$ を鏡映ベクトルとする実鏡映変換となる. 実超幾何群 H の階数が偶数 $n = 2m$ のとき, $m-1$ 次実多項式 $\Phi(w)$ と m 次実多項式 $\Psi(w)$ が存在して,

$$\varphi(z) = (z-1)(z+1)z^{m-1}\Phi(z+z^{-1}), \quad \psi(z) = z^m\Psi(z+z^{-1})$$

と表される. $\Phi(w), \Psi(w)$ を, それぞれ $\varphi(z), \psi(z)$ のトレース多項式とよぶ. このとき, 実超幾何群 $H = H(\varphi, \psi)$ は $H = H(\Phi, \Psi)$ と書くこともできる.

トレース・クラスターと指数 [12, §4.2]. Joukowski 変換 $w = z + z^{-1}$ により, 単位円周 $S^1 \subset \mathbb{C}_z$ は閉区間 $[-2, 2] \subset \mathbb{C}_w$ の上に $2:1$ に写される (ただし $w = \pm 2$ 上で分岐する). $\Phi(w)$ のすべての複素数根の多重集合を $\mathbf{A}$ と表す. $\mathbf{A}$ のうち $[-2, 2]$ の部分を $\mathbf{A}_{\text{on}}$ とおき, $[-2, 2]$ の外の部分を $\mathbf{A}_{\text{off}}$ とおく. $\Psi(w)$ に対しても $\mathbf{B}, \mathbf{B}_{\text{on}}, \mathbf{B}_{\text{off}}$ を同様に定義する. $\mathbf{A}_{\text{on}}$ と $\mathbf{B}_{\text{on}}$ はお互いを交互に並ぶ “トレース・クラスター” $\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \dots$ たちに分ける:

$$-2 \leq \mathbf{A}_{s+1} < \mathbf{B}_s < \mathbf{A}_s < \dots < \mathbf{B}_2 < \mathbf{A}_2 < \mathbf{B}_1 < \mathbf{A}_1 \leq 2. \quad (12)$$

このとき, 指数公式をトレース・クラスターの言葉で述べることもできる ([12, Theorem 4.2]). また, その局所版である局所指数公式も同様に与えることができる ([12, Proposition 4.5]).

12 超幾何格子

格子 (lattice) とは, 有限階数の自由アーベル群 $L \cong \mathbb{Z}^n$ に整数値の非退化対称双線型形式 $(\cdot, \cdot): L \times L \rightarrow \mathbb{Z}$ が付与されているものである. 格子 L が偶 (even) であるとは, 任意の元 $\mathbf{v} \in L$ に対して $(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ が偶数になることである. 格子 L がユニモジュラであるとは, 自然な準同型 $L \rightarrow L^* := \text{Hom}(L, \mathbb{Z}), \mathbf{v} \mapsto (\mathbf{v}, \cdot)$ が同型となることである. 格子 L の符号数 (p, q) とは, $L_{\mathbb{R}} := L \otimes \mathbb{R}$ とおくとき, 実 2 次形式 $(\cdot, \cdot): L_{\mathbb{R}} \times L_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ の符号数のことである.

超幾何群 $H = H(\varphi, \psi)$ が整 (integral) であるとは, $\varphi(z)$ と $\psi(z)$ が整数係数多項式であることである. 同値な言換えとして, トレース多項式 $\Phi(w), \Psi(w)$ が整数係数といってもよい.

定理 12.1 ([12]) 階数 n の整超幾何群 $H = \langle A, B \rangle$ から階数 n の偶格子 L が,

$$L = \langle \mathbf{r}, A\mathbf{r}, \dots, A^{n-1}\mathbf{r} \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle \mathbf{r}, B\mathbf{r}, \dots, B^{n-1}\mathbf{r} \rangle_{\mathbb{Z}} \quad (13)$$

により得られる．ここで L の整内積の A 基底に関する Gram 行列は $(A^{i-1}\mathbf{r}, A^{j-1}\mathbf{r}) = \xi_{|i-j|}$ で与えられる．ただし， $\xi_0 := 2$ であり，数列 $\{\xi_j\}_{j \geq 1}$ は $z = \infty$ の周りでの Taylor 展開式

$$\frac{\psi(z)}{\varphi(z)} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j z^{-j} \quad (14)$$

の係数として与えられる． B 基底に関する Gram 行列 $(B^{i-1}\mathbf{r}, B^{j-1}\mathbf{r})$ の公式は，式 (14) の左辺において $\varphi(z)$ と $\psi(z)$ を入れ替えることによって得られる．格子 L がユニモジュラとなるための必要十分条件は，終結式のことばで次のように述べられる．

$$\text{Res}(\varphi, \psi) = \pm 1, \quad \text{同値なこととして} \quad \text{Res}(\Phi, \Psi) = \pm 1.$$

定理 12.1 により定義される格子 L を超幾何群 H に付随する超幾何格子という．

13 超幾何 Hodge 等長変換

K3 曲面の 2 次コホモロジー群の階数は 22 であった (第 3 節)．そこで， $H = H(\varphi, \psi) = \langle A, B \rangle$ を 22 階の整超幾何群とし， L を付随する超幾何格子とする．また，行列 A, B の一方を F とおく．このとき， L がいつ K3 格子となり， $F: L \rightarrow L$ がいつ (適当な Hodge 構造に関して) 正の Hodge 等長変換になるだろうか．この間について，次の結果が示される．

場合	$[A_{\text{on}}]$	$[B_{\text{on}}]$	$ A_{>2} $	$ B_{\text{off}} $	制約条件	ST $\tau(A)$
1	$0^2 1^6 3^1$	1^8	1	3		middle of TC
2	$0^2 1^6 3^1$	$1^7 3^1$	1	1		middle of TC
3	$0^1 1^7 2^1$	1^8	1	3	$ A_1 = 2$	$\max A_1$
4	$0^1 1^7 2^1$	1^8	1	3	$ A_9 = 2$	$\min A_9$
5	$0^1 1^7 2^1$	$1^7 3^1$	1	1	$ A_1 = 2$	$\max A_1$
6	$0^1 1^7 2^1$	$1^7 3^1$	1	1	$ A_9 = 2$	$\min A_9$
7	$0^2 1^7 2^1$	$1^8 2^1$	1	1	doubles adjacent	inner of AP
8	$0^1 1^9$	$1^8 2^1$	1	1	$ A_1 = 1, B_1 = 2$	element of A_1
9	$0^1 1^9$	$1^8 2^1$	1	1	$ A_{10} = 1, B_9 = 2$	element of A_{10}

表 1: 行列 A が双曲型 Hodge 等長変換となる場合．

定理 13.1 ([12]) 超幾何格子 L が K3 格子となり，さらに下記のそれぞれの場合が起きるための必要十分条件を，式 (12) のトレース・クラスター等のことばで述べることができる．

- 行列 $F = A$ が楕円型または放物型 Hodge 等長変換となる，
- 行列 $F = A$ が双曲型 Hodge 等長変換となる (表 1 参照)，
- 行列 $F = B$ が正の Hodge 等長変換となる．この場合は必然的に双曲型となる．

ここで L 上の Hodge 構造 $L_{\mathbb{C}} = H^{2,0} \oplus H^{1,1} \oplus H^{0,2}$ は, F のある固有値 $\delta(F) \in S^1$ に対して,

$$H^{2,0}, H^{0,2} \text{ がそれぞれ } F \text{ の } \delta(F)\text{-固有直線, } \delta(F)^{-1}\text{-固有直線となる} \quad (15)$$

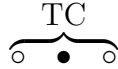
という条件で定まる. $\delta(F)^{\pm 1}$ を F の special eigenvalues とよび, $\tau(F) := \delta(F) + \delta(F)^{-1}$ を F の special trace (ST) という. $\delta(F)^{\pm 1}$ の組, 従って $\tau(F)$ は対 (φ, ψ) により一意的に定まる.

説明 13.2 表 1 は, 行列 A が双曲型の Hodge 等長変換になるときのトレース・クラスター

$$-2 \leq \mathbf{A}_{s+1} < \mathbf{B}_s < \mathbf{A}_s < \cdots < \mathbf{B}_2 < \mathbf{A}_2 < \mathbf{B}_1 < \mathbf{A}_1 \leq 2 \quad (12)$$

の配置, および special trace (ST) $\tau(A)$ の位置を示している. ここで, 記号 $\mathbf{A}_{\text{on}}, \mathbf{B}_{\text{on}}, \mathbf{B}_{\text{off}}$ の意味は第 11 節で説明した通りである. $\mathbf{A}_{>2}$ は $\mathbf{A}$ のうち 2 より大きい部分を表す. また $|\cdot|$ は有限集合の元の個数を表す. その他の表 1 の見方は次の通りである.

- 式 (12) において, 両端のクラスター $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_{s+1}$ の一方または両方は空 (null) かもしれない. その他のすべてのクラスターは空ではない.
- $[\mathbf{A}_{\text{on}}] = 0^{\nu_0} 1^{\nu_1} 2^{\nu_2} 3^{\nu_3}$ は, $\mathbf{A}_{\text{on}}$ が ν_0 個の null クラスター, ν_1 個の simple クラスター, ν_2 個の double クラスター, ν_3 個の triple クラスターからなることを意味する. ただし, $\nu_j = 0$ のとき j^{ν_j} は省略する.
- Middle of TC とは, $\mathbf{A}_{\text{on}}$ が唯 1 つの triple クラスター (TC) を含み, ST $\tau(A)$ が TC の真ん中の元であることを意味する. つまり, 下図において $\bullet$ が $\tau(A)$ である.



- Doubles adjacent とは, $\mathbf{A}_{\text{on}}$ と $\mathbf{B}_{\text{on}}$ がそれぞれ唯 1 つの double クラスター $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_j$ を含み, かつ $\mathbf{A}_i$ と $\mathbf{B}_j$ が隣接 (adjacent) していること, すなわち $j = i$ または $j = i - 1$ となることを意味する. このとき, $\mathbf{A}_i$ と $\mathbf{B}_j$ の対を AP (adjacent pair) とよぶ. そして inner of AP とは, ST $\tau(A)$ が合併集合 $\mathbf{A}_i \cup \mathbf{B}_j$ の内側にある $\mathbf{A}_i$ の元であることを意味する. つまり, 下図の各々において $\bullet$ が $\tau(A)$ である.



行列 A が楕円型または放物型の Hodge 等長変換になる場合, あるいは行列 B が (双曲型の) Hodge 等長変換になる場合の表 1 に対応する結果は [12, Tables 1, 3] に与えられている.

14 超幾何群の方法

第 13 節の状況で, $F : L \rightarrow L$ が双曲型の Hodge 等長変換であるとする. F の固有多項式は,

$$\chi(z) = \begin{cases} \varphi(z), & F = A \text{ のとき,} \\ \psi(z), & F = B \text{ のとき} \end{cases}$$

であることに注意する．行列 $C := A^{-1}B$ の (-1) -固有ベクトルを $\mathbf{r}$ とおくと，式 (13) より $L = \langle \mathbf{r}, F\mathbf{r}, \dots, F^{21}\mathbf{r} \rangle_{\mathbb{Z}}$ である．第 4 節で述べたことより， F の固有多項式は，

$$\chi(z) = S(z) \cdot C(z) \quad (16)$$

と因数分解する．ただし， $S(z)$ は Salem 多項式， $C(z)$ は円分多項式の積または 1 である．このとき，Picard 格子が $\text{Pic} := H^{1,1} \cap L$ により定まる． Pic の階数，すなわち Picard 数は $\rho = 22 - \deg S(z)$ である．ベクトル $\mathbf{s} := S(F)\mathbf{r}$ を導入すると，Picard 格子は

$$\text{Pic} = \langle \mathbf{s}, F\mathbf{s}, \dots, F^{\rho-1}\mathbf{s} \rangle_{\mathbb{Z}}$$

と基底表示される．この基底を Pic の標準基底という．標準基底に関する辞書式順序はルート系

$$\Delta = \{\mathbf{v} \in \text{Pic} \mid (\mathbf{v}, \mathbf{v}) = -2\}$$

の中に正ルートの集合 Δ^+ を定める．時間的集合 $\{\mathbf{u} \in H_{\mathbb{R}}^{1,1} \mid (\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0\}$ の 2 つの連結成分のうち 1 つを正錐 $\mathcal{C}$ と定める．そして， Δ^+ に対応する Weyl の部屋

$$\mathcal{K} := \{\mathbf{u} \in \mathcal{C} \mid \text{任意の } \mathbf{v} \in \Delta^+ \text{ に対して } (\mathbf{u}, \mathbf{v}) > 0\}$$

を “Kähler 錐” として採用する．以上で，超幾何 K3 格子 L 上に K3 構造が導入された．

ここで 1 つ問題が生じる．すなわち，一般に Hodge 等長変換 $F: L \rightarrow L$ は $\mathcal{K}$ を別の Weyl の部屋に写し，K3 構造を保存しない．しかし，Weyl 群 W は Weyl の部屋全体の集合に単純推移的に作用するので，Weyl の部屋 $F(\mathcal{K})$ を $\mathcal{K}$ に呼び戻す元 $w_F \in W$ が一意的に存在する．このことを利用して，当初の格子同型 $F: L \rightarrow L$ を

$$\tilde{F} := w_F \circ F: L \rightarrow L \quad (17)$$

へ改変する．好ましいことに，標準基底を用いると，Weyl 群の元 w_F を出力するアルゴリズムを作ることができる．この改変 (17) は Hodge 構造，スペクトル半径 $\lambda(\tilde{F}) = \lambda(F)$ および special trace $\tau(\tilde{F}) = \tau(F)$ を変えない．改変後の Hodge 等長変換 $\tilde{F}: L \rightarrow L$ は K3 構造を保つので，定理 3.1 により K3 曲面自己同型 $f: X \rightarrow X$ に持ち上がる．そのエントロピーは $h(f) = \log \lambda(F)$ であって，Picard 格子 $\text{Pic}(X) \cong \text{Pic}$ と Kähler 錐 $\mathcal{K}_X \cong \mathcal{K}$ をもつ．写像 f は，同型と複素共役を除いて，対 (φ, ψ) により一意に決まる．

以上の操作により，多項式対 (φ, ψ) から出発して K3 曲面自己同型 $f: X \rightarrow X$ を作り出す方法を，超幾何群の方法という．この方法で作った自己同型は，設定 4.3 の条件 (A1), (A2) をみたしている．式 (16) において，Salem 多項式 $S(z)$ および円分多項式の積 $C(z)$ をさまざまに取り替えることにより，さまざまの自己同型 $f: X \rightarrow X$ を得ることができる．Salem 多項式については，Mossinghoff [24] において，次数の小さい方からたくさんの多項式が提供されているので，それらを利用することができる．円分多項式の方は，数式処理システムに標準装備されている．超幾何群の方法におけるさまざまなステップの構成や条件のチェックは，やはり数式処理システムを用いて実行可能である．このようにして得られた数多くの K3 曲面自己同型の例が Iwasaki-Takada [14] に展示されている．そのような具体例に対して，回転領域の判定条件 (結果 9.2) を検証することができる [11]．そして，結果 8.1 で記述したすべての場合を網羅する実例を構成することができる．また，例外集合を持たず，かつ階数 1 の回転領域をもつような，正エントロピーの K3 曲面自己同型の例なども構成することができる．

謝辞

第 22 回岡シンポジウムで講演の機会をいただいた奈良女子大学 岡数学研究所と松澤 淳一所長に感謝する．本研究は JSPS 科研費基盤研究 (C) JP22K03365 の補助を受けている．本稿には，高田 佑太氏との最近の共同研究，上原 崇人氏との以前の共同研究に負う内容が含まれている．JSPS および両氏に感謝する．

参考文献

- [1] A. Baker, *Transcendental Number Theory*, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [2] E. Bedford and K. Kim, *Dynamics of rational surface automorphisms: linear fractional recurrences*, J. Geom. Anal. **19** (2009), 553–583.
- [3] E. Bedford and K. Kim, *Dynamics of rational surface automorphisms: rotation domains*, Amer. J. Math. **134** (2012), no. 2, 379–405.
- [4] F. Beukers and G. Heckman, *Monodromy for the hypergeometric function ${}_nF_{n-1}$* , Invent. Math. **95** (1989), 325–354.
- [5] S. Cantat, *Dynamique des automorphismes des surfaces projective complexes*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. **328** (1999), no. 10, 901–906.
- [6] S. Cantat, *Dynamique des automorphismes des surface K3*, Acta Math. **187** (2001), no. 1, 1–57.
- [7] H. Cartan, *Sur les groupes de transformations analytiques*, Act. Sci. Ind., Herman, Paris, 1935.
- [8] T.-C. Dinh, V.-A. Nguyên and T.T. Truong, *Growth of the number of periodic points for meromorphic maps*, Bull. London Math. Soc. **49** (2017), 947–964.
- [9] M. Gromov, *On the entropy of holomorphic maps*, Enseignement Math. **49** (2003), 217–235.
- [10] D. Huybrechts, *Lectures on K3 Surfaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
- [11] K. Iwasaki, *Equivariant linearization and rotation domains on K3 surfaces*, in preparation.
- [12] K. Iwasaki and Y. Takada, *Hypergeometric groups and dynamics on K3 surfaces*, Math. Z. **301** (2022), no. 1, 835–891.
- [13] K. Iwasaki and Y. Takada, *K3 surfaces, Picard numbers and Siegel disks*, J. Pure Appl. Algebra **227** (2023), Paper 107215, 31pp.

- [14] K. Iwasaki and Y. Takada, *Mathematica Programs and Tables for K3 Surfaces, Picard Numbers and Siegel Disks*. <https://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~iwasaki/>
- [15] K. Iwasaki and T. Uehara, *Periodic points for area-preserving birational maps of surfaces*, Math. Z. **266** (2010), no. 2, 289–318.
- [16] K. Lamotke, *Regular Solids and Isolated Singularities*, Vieweg-Verlag, Braunschweig, 1986.
- [17] D.H. Lehmer, *Factorization of certain cyclotomic functions*, Ann. Math. (2) **34** (1933), 461–479.
- [18] A.H.M. Levelt, *Hypergeometric Functions*, Ph.D. thesis, University of Amsterdam, 1961.
- [19] 松澤 淳一, *特異点とルート系*, 朝倉書店, 2002.
- [20] C.T. McMullen, *Dynamics on K3 surfaces: Salem numbers and Siegel disks*, J. Reine Angew. Math. **545** (2002), 201–233.
- [21] C. T. McMullen, *Dynamics on blowups of the projective plane*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **105** (2007), no. 1, 49–89.
- [22] C.T. McMullen, *K3 surfaces, entropy and glue*, J. Reine Angew. Math. **658** (2011), 1–25.
- [23] C.T. McMullen, *Automorphisms of projective K3 surfaces with minimum entropy*, Invent. Math. **203** (2016), 179–215.
- [24] M.J. Mossinghoff, *More Salem Numbers, Lists of Polynomials with Small Mahler Measure, Lehmer’s Problem*. <http://wayback.cecm.sfu.ca/~mjm/Lehmer/lists/>
- [25] K. Oguiso, *The third smallest Salem number in automorphisms of K3 surfaces*, Adv. Stud. Pure Math. **60** (2010), 331–360.
- [26] J. Pöschel, *On invariant manifolds of complex analytic mappings near fixed points*, Expositiones Math. **4** (1986), no. 2, 97–109.
- [27] S. Saito, *General fixed point formula for an algebraic surface and the theory of Swan representations for two-dimensional local rings*, Amer. J. Math. **109** (1987), no. 6, 1009–1042.
- [28] Y.-T. Siu, *Every K3 surface is Kähler*, Invent. Math. **73** (1983), no. 1, 139–150.
- [29] C. Smyth, *Seventy years of Salem numbers*, Bull. London Math. Soc. **47** (2015), 379–395.
- [30] D. Toledo and Y.L. Tong, *Duality and intersection theory in complex manifolds. II. The holomorphic Lefschetz formula*, Ann. Math. (2) **108** (1978), no. 3, 519–538.
- [31] T. Uehara, *Rational surface automorphisms with positive entropy*, Ann. Inst. Fourier **66** (2016), no. 1, 377–432.

[32] Y. Yomdin, *Volume growth and entropy*, Israel J. Math. **57** (1987), 285–300.