

輓近岡理論の展望

日下部 佑太

2024 年 12 月 1 日
第 22 回岡シンポジウム

概要

およそ 90 年前に誕生した岡理論は、上空移行の原理を軸として多変数函数論における三大問題を全て解決した。本稿では、当時の岡理論から “modern Oka theory” と称される岡多様体論までの流れを概観し、三大問題を現代的な視点から再考する。

1 多変数函数論の三大問題

岡理論とは、岡潔が多変数函数論の三大問題を解決する際に建設した理論であり、三大問題を展望することと岡理論を展望することはほとんど同義である。1934 年の Behnke–Thullen の著書 [2] から岡が目標として絞った以下の三つの中心的な問題が多変数函数論の**三大問題**である。

- 近似問題 (Runge の近似定理の多変数化)
- Cousin 問題 (Mittag–Leffler, Weierstrass の定理の多変数化)
- Hartogs の逆問題 $\equiv$ Levi 問題 (正則領域の幾何学的特徴付け)

最後の問題のみ、一変数函数論では生じない多変数函数論特有の問題であり、他の問題とは性格が異なる問題である。以上の問題は、歴史的には岡によって上から順に解決されたが、多変数函数論が一変数函数論の単純な一般化ではないことを見るために、まずは多変数函数論特有の問題である Hartogs の逆問題から見ていく。

1.1 正則領域と Hartogs の逆問題

Hartogs の逆問題は、Hartogs によって 1906 年に観察された次の現象から生じる問題である。

定理 1.1 (Hartogs 現象). 開円板 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ と $0 < \epsilon < 1$ を用いて定義される領域

$$H_\epsilon = ((\mathbb{D} \setminus (1 - \epsilon)\overline{\mathbb{D}}) \times \mathbb{D}) \cup (\mathbb{D} \times \epsilon\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}^2$$

に対して、正則関数の集合の間の制限写像 $\mathcal{O}(\mathbb{D}^2) \rightarrow \mathcal{O}(H_\epsilon)$, $f \mapsto f|_{H_\epsilon}$ は全射である。

この Hartogs 現象から、与えられた正則関数をそれ以上大きな領域に解析接続することができな

いような領域が興味の対象となり, そのような領域は正則領域と呼ばれる. すなわち, 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ が ($\mathbb{C}^n$ における) **正則領域**であるとは, ある正則関数 $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ が存在して, f の芽の集合

$$\{[f]_z : z \in \Omega\} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$$

が正則関数の芽のなす層 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ を $\mathbb{C}^n$ 上の étalé 空間 ($\mathbb{C}^n$ への局所同相写像を持つ空間) として見たときの弧状連結成分になることをいう. $\mathbb{C}$ 内の任意の領域が正則領域であることは, Weierstrass の補間定理の簡単な帰結である.

上の Hartogs 現象は, $\mathbb{C}^n$ 内の領域が正則領域になるためのある種の凸性による幾何学的必要条件を与えていることに注意する. すなわち, 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ が **Hartogs 擬凸**であるということを任意の $0 < \epsilon < 1$ に対して制限写像 $\mathcal{O}(\mathbb{D}^2, \Omega) \rightarrow \mathcal{O}(H_\epsilon, \Omega)$ が全射になることと定義すると, 任意の正則領域が Hartogs 擬凸であることが従う. この逆が成り立つかどうかを問うのが **Hartogs の逆問題**である.

問題 1.2 (Hartogs の逆問題). 任意の Hartogs 擬凸領域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ は正則領域であるか.

領域の境界が滑らかな場合, Levi によって Hartogs 擬凸性が微分幾何学的な Levi 擬凸性によって表現されたことから Levi 問題とも呼ばれる. この問題は岡, Bremermann, Norguet によって独立に肯定的に解決された. 一松による論説 [15] においても証明が与えられていることに注意する.

1.2 Stein 多様体と近似問題

Hartogs 現象によって, 正則関数の自然な定義域である正則領域のある種の凸性が明らかになった流れで, Cartan–Thullen [3] は次の正則凸性により正則領域を特徴付けた.

定義 1.3. 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 内のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ に対し, その**正則凸包** $\hat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}$ を

$$\hat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)} = \left\{ z \in \Omega : \forall f \in \mathcal{O}(\Omega) \ |f(z)| \leq \sup_K |f| \right\}$$

と定める. $K = \hat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}$ が成り立つとき, K は**正則凸**であるという.

領域 Ω が**正則凸**であるとは, あるコンパクト正則凸集合列の増大和

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i = \Omega, \quad K_i \subset K_{i+1}^\circ$$

となることをいう. ここで K_{i+1}° は K_{i+1} の内部を表す.

以上の定義は, 複素多様体にそのままの形で一般化することができる. この正則凸性による正則領域の特徴付けにより, 正則領域の多様体版として Stein 多様体と呼ばれる概念が導入される.

定義 1.4. 複素多様体 X が **Stein 多様体**であるとは, X が正則凸かつ写像

$$X \rightarrow \mathbb{C}^{\mathcal{O}(X)}, \quad x \mapsto (f(x))_{f \in \mathcal{O}(X)}$$

が単射であることをいう.

領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 内のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ が正則凸であることと, Ω で相対コンパクトな $\Omega \setminus K$ の弧状連結成分が存在しないことが同値であることに注意する. つまり Runge の近似定理は, コンパクト正則凸集合 $K \subset \Omega$ の近傍で定義された正則関数が, Ω 全体で定義された正則関数で K 上に近似的に近似できることを主張するものである. このような観点から Runge の近似定理を Stein 多様体に一般化する問題が**近似問題**であり, この問題は次のような形で解決されている.

定理 1.5 (Oka–Weil の近似定理). 任意の Stein 多様体 X 内のコンパクト正則凸集合 $K \subset X$ に対し, 制限写像 $\mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{O}(K)$ の像は (コンパクト開位相に関して) 稠密である.

この近似定理は, 「次元を上げることで問題の困難さを緩和できる」という岡の**上空移行の原理**によって, 比較的簡単な拡張定理と冪級数展開に帰着することで証明された. 証明で現れる拡張定理を洗練した次のような拡張定理のことを上空移行と呼ぶこともある.

定理 1.6 (Oka–Cartan の拡張定理). 任意の Stein 多様体 X と, その閉解析的部分集合 (局所的に正則写像のファイバーとなる閉集合) $Z \subset X$ に対して, 制限写像 $\mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{O}(Z)$ は全射である.

この拡張定理は, Weierstrass の補間定理の多変数化を与えていることに注意する.

1.3 Cousin 問題と岡の原理

一変数関数論においては, 与えられた主要部を持つ大域的な有理型関数の存在を主張する Mittag–Leffler の定理と, 与えられた零点と極を持つ大域的な有理型関数の存在を主張する Weierstrass の定理が基本的である. これらの多変数化を問うのが **Cousin 問題**で, それぞれ Cousin の第 I 問題, 第 II 問題と呼ばれる. X 上の有理型関数の芽のなす層 $\mathcal{M}_X$ や正則関数の芽のなす層 $\mathcal{O}_X$ の単元のなす層 $\mathcal{M}_X^*, \mathcal{O}_X^*$ に関するコホモロジーの言葉を用いることで, これらの問題は次のように簡潔に述べることができる.

問題 1.7 (Cousin 問題). X を Stein 多様体とする.

(I) 自然な射 $H^0(X, \mathcal{M}_X) \rightarrow H^0(X, \mathcal{M}_X/\mathcal{O}_X)$ の像を調べよ.

(II) 自然な射 $H^0(X, \mathcal{M}_X^*) \rightarrow H^0(X, \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$ の像を調べよ.

コホモロジーの長完全列を考えることで, これらはそれぞれ

(I') 連結準同型 $H^0(X, \mathcal{M}_X/\mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)$ の核を調べよ.

(II') 連結準同型 $H^0(X, \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ の核を調べよ.

という問題に言い換えることができる. 第 I 問題が常に解ける, すなわち (I) の射が全射であるということは, この言い換えと次の消滅定理から直ちに従う.

定理 1.8 (Oka–Cartan の消滅定理). X が Stein 多様体ならば, 任意の $q \geq 1$ に対して $H^q(X, \mathcal{O}_X) = 0$ が成り立つ.

一方で, X が Stein 多様体でも (II) の射は全射とは限らないことが知られている (cf. [26]). (II') の射の値域であるコホモロジー群 $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ が, X の正則直線束の同型類のなす **Picard 群**と呼ばれる群であることに注意すると, Cousin の第 II 問題が次の問題に含まれることが分かる.

問題 1.9. Stein 多様体 X 上の正則直線束 L はいつ自明束と正則同型になるか. すなわち, L から零切断 $0_L \subset L$ を除いた主 $\mathbb{C}^*$ 束 $L^* = L \setminus 0_L \rightarrow X$ は, いつ (大域的) 正則切断を持つか.

このような状況で岡 [26] は, 次のように連続切断の存在が正則切断の存在を導くことを示した. このような「Stein 多様体上の解析的問題は位相的な解を持てば解析的な解も持つ」という原理は, 1951 年に Serre によって**岡の原理**と名付けられた.

定理 1.10 (岡の原理). 任意の Stein 多様体 X 上の正則直線束 L に対する主 $\mathbb{C}^*$ 束 $L^* \rightarrow X$ について, 連続切断が存在するならば正則切断も存在する.

Grauert [9, 10] はこの岡の原理を任意の正則主束に対する岡の原理に一般化し, **Oka–Grauert の原理**とも呼ばれる正則主束の位相的な分類を与えた.

2 Gromov による軌近岡理論

Gromov [13] は, Grauert による岡の原理の一般化をホモトピー原理の観点からさらに推し進め, 構造群に関する条件無しでファイバーが楕円的な正則ファイバー束に対する岡の原理を確立した.

定義 2.1. 複素多様体 X, Y の間の正則写像 $f \in \mathcal{O}(X, Y)$ 上の**支配的スプレー**とは, 正則ベクトル束 $p: E \rightarrow X$ の全空間からの正則写像 $s: E \rightarrow Y$ で, 以下の二条件を満たすものである:

- (1) 零切断 $X \cong 0_E \subset E$ に対して $s|_{0_E} = f$ が成り立つ.
- (2) 正則写像 $(p, s): E \rightarrow X \times Y$ は零切断 $0_E \subset E$ の近傍で沈め込みとなる.

複素多様体 Y が**楕円的**であるとは, Y の恒等写像上の支配的正則スプレーが存在することをいう.

次の例のように, 支配的スプレーは複素 Lie 群の指数写像を一般化する概念である.

例 2.2. 複素 Lie 群 G に対して, その Lie 代数を $\mathfrak{g}$ とすると,

$$s: G \times \mathfrak{g} \rightarrow G, \quad (g, X) \mapsto \exp(X) \cdot g$$

は G の恒等写像上の支配的スプレーである. よって, 任意の複素 Lie 群は楕円的である.

同じ式で定義される支配的スプレーにより, 複素 Lie 群 G の推移的正則作用を持つ複素多様体 (複素等質多様体) も楕円的であることが分かる.

次の定理が, Oka–Grauert の原理を一般化する Gromov による岡の原理である.

定理 2.3 (Gromov の岡の原理). 複素多様体 Y が楕円的であると仮定する. このとき, 任意の Stein 多様体 X 上の Y をファイバーとする正則ファイバー束 $E \rightarrow X$ に対し, 連続切断

$f_0 : X \rightarrow E$ が存在すれば正則切断 $f : X \rightarrow E$ も存在する. さらに, 連続切断 f_0 がコンパクト正則凸集合 $K \subset X$ の近傍と閉解析的部分集合 $Z \subset X$ の上で正則ならば, 正則切断 $f : X \rightarrow E$ として f_0 に K 上で一様に近く, Z 上で値が一致するようなものをとることができる.

この結論が成り立つような複素多様体 Y , すなわち岡の原理が成り立つような複素多様体を **岡多様体** と呼ぶ. 岡多様体の定義は Oka–Grauert の原理だけでなく, Oka–Weil の近似定理や Oka–Cartan の拡張定理も含んでいることに注意する (実は Cousin の第 I 問題の解決も含む).

楕円的な複素多様体は複素等質多様体だけでなく, 例えば余次元が 2 以上の閉代数的部分集合 $Z \subset \mathbb{C}^n$ に対してその補集合 $\mathbb{C}^n \setminus Z$ が楕円的事象であることは Gromov の論文 [13] でも挙げられている有名な例である. このような例と Gromov の岡の原理の応用として, 次元が 2 以上の Stein 多様体の最良次元複素 Euclid 空間への埋め込みに関する Forster 予想が解決された [4, 28].

具体的な複素多様体が与えられたときに, 上の定義を用いて岡多様体であるかどうか確かめるのは極めて困難である. Forstnerič [6] は, この問題を解決する次の単純な Runge 型近似定理の成立による岡多様体の特徴付けを与えた.

定理 2.4 (Forstnerič の岡の原理). 複素多様体 Y が岡であることと, 任意のコンパクト凸集合 $K \subset \mathbb{C}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) に対して制限写像 $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, Y) \rightarrow \mathcal{O}(K, Y)$ の像が稠密になることは同値である.

この定理から, 複素多様体の岡性が正則写像に関する Oka–Weil の近似定理の成立や, Oka–Cartan の拡張定理の成立と同値であることが従う. 正則写像に関する Oka–Weil の近似定理や Oka–Cartan の拡張定理の同値性は, 岡性を介さずに直接確かめることもできる [17, 23].

Hartogs 現象から Hartogs の逆問題が生じたのと同様に, Gromov の逆問題とも呼びたくなる次の問題が自然と生じる. この問題は実際に Gromov の論文 [13] でも問われたものである.

問題 2.5 (Gromov [13, Question 3.2.A]). 任意の岡多様体は楕円的事象であるか.

この問題は [18] において, 初めての反例となる非楕円的事象岡多様体

$$\mathbb{C}^3 \setminus \left(\left(\overline{\mathbb{N}^{-1}} \right)^2 \times \{0\} \right)$$

が発見され, その論文を洗練した [20] においてより単純な非楕円的事象岡多様体

$$\mathbb{C}^3 \setminus \overline{\mathbb{B}^3} = \{z \in \mathbb{C}^3 : \|z\| > 1\}$$

が発見された. これらの反例の非楕円性は Andrist–Shcherbina–Wold [1] によるもので, Siu [29] による解析的连接層に対する Hartogs 型拡張定理が証明の本質である. 岡性の証明には, 楕円性の変種である条件 Ell_1 に関する次の Gromov 予想の肯定的解決 [19] が用いられる.

予想 2.6 (Gromov [13, 1.4.E]). 複素多様体 Y がであることと, 次の条件は同値であろう:

(Ell_1) 任意の Stein 多様体 X からの $f \in \mathcal{O}(X, Y)$ に対して, f 上の支配的スプレーが存在する.

3 新たな三大問題 (の候補)

前節まで、古典的な岡理論が岡多様体論へと洗練されていく様子を見てきた。この最後の節では、Gromov の問題と予想が解決されたこれからの岡多様体論において、新たな三大問題となり得る三つの中心的な問題

- 増大度付き上空移行の問題
- 有理型写像の問題
- 双対 Levi 問題

を見ていく。

3.1 増大度付き上空移行の問題

前節で、岡多様体を値域とする正則写像について Oka–Cartan 型拡張定理が成り立つことを見た。ここで、正則関数に関する古典的な Oka–Cartan の拡張定理は、代数多様体の圏の中でもアファイン代数多様体上の同様の拡張定理が成り立つことに注意する。従って、岡多様体を値域とする正則写像の拡張定理についてもその代数版があると考えるのが自然である。

岡多様体の代数版として考えられるのは、条件 Ell_1 の Stein 多様体をアファイン代数多様体で置き換えて代数多様体の圏で類似の条件を考えることで得られる代数的 Ell_1 を満たす代数多様体である。Gromov [13] と Kaliman–Zaidenberg [16] の結果から、この条件は代数的な楕円性と同値になる、すなわち Gromov の問題 2.5 の代数版が肯定的に解決されることが知られている。

問題 3.1 (代数的上空移行). 代数的 Ell_1 を満たす非特異代数多様体 Y と、アファイン代数多様体の間の閉埋め込み $Z \hookrightarrow X$ に対し、代数的な射の制限 $\mathcal{O}_{\text{alg}}(X, Y) \rightarrow \mathcal{O}_{\text{alg}}(Z, Y)$ の像を調べよ。

岡の原理と同様に、連続な拡張の存在が代数的な拡張の存在を導くことが期待されるが、Lárusson–Truong [25] によって次のような否定的な結果が示されている。

定理 3.2 ([25]). 任意の非特異完備代数多様体 Y に対して、ある閉代数的部分集合 $Z \subset \mathbb{C}^2$ からの射 $f \in \mathcal{O}_{\text{alg}}(Z, Y)$ で、連続に $\mathbb{C}^2$ に拡張できるが、代数的に拡張できないようなものが存在する。

一方で Z が 0 次元の場合は、例えば被約でなくても常に代数的な拡張を持つことが示されている。

定理 3.3 ([21]). Y を代数的 Ell_1 を満たす非特異既約代数多様体、 X をアファイン代数多様体、 Z を X の 0 次元部分スキームとする。このとき、制限写像 $\mathcal{O}_{\text{alg}}(X, Y) \rightarrow \mathcal{O}_{\text{alg}}(Z, Y)$ は全射である。

岡多様体の Oka–Cartan 型拡張定理は、ホモトピー論の言葉では制限写像 $\mathcal{O}(X, Y) \rightarrow \mathcal{O}(Z, Y)$ が Serre ファイブレーションになるということと深く関係し、これらのことから次が予想される。

予想 3.4 (A^1 ホモトピー拡張定理). 代数的 Ell_1 を満たす非特異代数多様体 Y と、アファイン代

数多様体の間の閉埋め込み $Z \hookrightarrow X$ に対し, 制限写像

$$\mathcal{O}_{\text{alg}}(X \times \mathbb{A}^1, Y) \rightarrow \mathcal{O}_{\text{alg}}((Z \times \mathbb{A}^1) \cup (X \times \{0\}), Y)$$

は全射であろう.

$\mathbb{C}$ 上でこの条件の近似定理版を考えると, 代数的 Ell_1 と同値になることが知られている [5, 25].

上の予想のような特別な埋め込みに対する拡張定理ではなく一般の拡張定理を示したい場合は, Lárusson–Truong による上記の否定的な結果があるため射のクラスを拡げる必要がある. Griffiths [11, 12] によって発見された「位数有限正則写像まで射のクラスを拡げることで代数多様体の圏の函数論的閉包が得られる」という原理から, 位数有限正則写像まで拡げるのが有力なアイデアである.

予想 3.5 (位数有限上空移行). 代数的 Ell_1 を満たす非特異代数多様体 Y と, アフィン代数多様体の間の閉埋め込み $Z \hookrightarrow X$ に対し, 位数有限正則写像 $f \in \mathcal{O}_{\text{f.o.}}(Z, Y)$ が X に連続に拡張されるならば, X に位数有限正則写像としても拡張されるであろう.

3.2 有理型写像の問題

一変数の Runge の近似定理が, 有理型関数を許すことで任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ に対して成り立つことはよく知られている. この有理型近似定理についても, コンパクト有理型凸集合を考慮することで多変数化できるということが知られている (cf. Hirschowitz [14]). 従って, この近似定理も Oka–Weil の近似定理と同様に, 岡多様体への有理型写像による近似定理へと一般化できることが期待される.

問題 3.6. Hirschowitz [14] の有理型関数による近似定理を, (ある自然なクラスの) 岡多様体への有理型写像による近似定理に一般化せよ. さらに, その近似定理を用いて (ある自然なクラスの) 岡多様体の双有理不変性を調べよ.

岡多様体の双有理不変性に関しては, まず次の否定的な結果が知られている.

定理 3.7 ([19, Example A.3]). ある離散閉集合 $Z \subset \mathbb{C}^2$ を中心とする $\mathbb{C}^2$ の爆発は岡でない.

考える岡多様体のクラスを制限することで, 次のように爆発が岡になる場合もある.

定理 3.8 ([17, 24]). Y を代数的 Ell_1 を満たす非特異代数多様体, $Z \subset Y$ を滑らかな閉代数的部分多様体とする. このとき, Z を中心とする Y の爆発は岡多様体である.

3.3 双対 Levi 問題

Stein 多様体が正則関数の自然な定義域であることと双対的に, 岡多様体は正則写像の自然な値域であると考えられる. このことは Lárusson [22] によってモデル圏の言葉で厳密化され, そのモデル圏においては Stein 性と岡性がそれぞれ cofibrancy と fibrancy に対応する. Stein 性について Hartogs の逆問題 $\Leftarrow$ Levi 問題が重要な問題であることを考えると, 双対的な次の Levi 型問題もいずれその重要性が高まってくると考えられる.

問題 3.9 (双対 Levi 問題). 複素多様体内の領域 $\Omega \subset X$ の岡性と, その境界 $\partial\Omega$ の幾何学的性質 (擬凸性や擬凹性など) の関係を明らかにせよ.

この問題に関連する初出の定理は Forstnerič–Ritter [8] によって観察された次の定理である.

定理 3.10 (Forstnerič–Ritter [8]). 複素多様体 X 内の滑らかな境界を持つ岡領域 $\Omega \subset X$ に対して, 境界 Ω は強擬凸な境界点を一つも持たない.

この定理は, 岡領域がある種の凹性を持つことを主張している. 逆にある種の凹性が岡性を導くという方向における初出の定理は, Gromov の問題 2.5 に反例を与えた次の定理である.

定理 3.11 ([20, Corollary 1.3]). 任意のコンパクト正則凸集合 $K \subset \mathbb{C}^n$ ($n > 1$) に対して, 補集合 $\mathbb{C}^n \setminus K$ は岡領域である.

以上のことから, 双対 Levi 問題の両方向について次のように予想される.

予想 3.12. $\Omega \subset X$ を複素多様体 X 内の境界が滑らかな領域とする.

- (1) Ω が岡領域ならば, Ω は Levi 擬凹 (すなわち $X \setminus \Omega$ が Levi 擬凸) であろう.
- (2) Ω が Levi 擬凹かつ $X = \mathbb{P}^n$ ($n > 1$) ならば, Ω は岡領域であろう.

(2) では, $X = \mathbb{C}^n$ の場合に Rosay–Rudin [27] の結果から容易に反例を構成できるため, 次に考えるべき $\mathbb{P}^n$ を X としているが, 当然他の複素多様体 X でも同様の問題が考えられる. Forstnerič–Kusakabe [7] では Hermite 正則直線束の単位円板束の岡性が調べられ, 双対 Levi 問題の解の一種とも考えられる次の定理が, 上の論文 [20] の結果の応用として示された.

定理 3.13 (Forstnerič–Kusakabe [7]). X を次元が 2 以上の有理等質多様体, $L \rightarrow X$ を豊富な正則直線束, h を L 上の Hermite 計量とする. このとき単位円板束 $\{v \in L : |v|_h < 1\}$ について, Levi 擬凹ならば岡領域である.

参考文献

- [1] R. B. Andrist, N. Shcherbina, and E. F. Wold. The Hartogs extension theorem for holomorphic vector bundles and sprays. *Ark. Mat.*, 54(2):299–319, 2016.
- [2] H. Behnke and P. Thullen. Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3*, No.3, Springer-Verlag, Berlin, 1934.
- [3] H. Cartan and P. Thullen. Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen. *Math. Ann.*, 106(1):617–647, 1932.
- [4] Y. Eliashberg and M. Gromov. Embeddings of Stein manifolds of dimension n into the affine space of dimension $3n/2 + 1$. *Ann. of Math. (2)*, 136(1):123–135, 1992.
- [5] F. Forstnerič. Holomorphic flexibility properties of complex manifolds. *Amer. J. Math.*, 128(1):239–270, 2006.
- [6] F. Forstnerič. Runge approximation on convex sets implies the Oka property. *Ann. of Math. (2)*, 163(2):689–707, 2006.
- [7] F. Forstnerič and Y. Kusakabe. Oka tubes in holomorphic line bundles. *Math. Ann.*, to appear.
- [8] F. Forstnerič and T. Ritter. Oka properties of ball complements. *Math. Z.*, 277(1-2):325–338, 2014.
- [9] H. Grauert. Holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen. *Math. Ann.*, 133:450–472, 1957.
- [10] H. Grauert. Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen. *Math. Ann.*, 135:263–273, 1958.
- [11] P. A. Griffiths. Function theory of finite order on algebraic varieties. I(A). *J. Differential Geometry*, 6:285–306, 1971.
- [12] P. A. Griffiths. Function theory of finite order on algebraic varieties. I(B). *J. Differential Geometry*, 7:45–66, 1972.
- [13] M. Gromov. Oka’s principle for holomorphic sections of elliptic bundles. *J. Amer. Math. Soc.*, 2(4):851–897, 1989.
- [14] A. Hirschowitz. Sur l’approximation des hypersurfaces. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3)*, 25:47–58, 1971.
- [15] 一松 信. 岡の接続定理について. *数学*, 1:304–307, 1949.
- [16] S. Kaliman and M. Zaidenberg. Gromov ellipticity and subellipticity. *Forum Math.*, 36(2):373–376, 2024.
- [17] Y. Kusakabe. An implicit function theorem for sprays and applications to Oka theory. *Internat. J. Math.*, 31(9):2050071, 9, 2020.
- [18] Y. Kusakabe. Oka complements of countable sets and nonelliptic Oka manifolds. *Proc.*

- Amer. Math. Soc.*, 148(3):1233–1238, 2020.
- [19] Y. Kusakabe. Elliptic characterization and localization of Oka manifolds. *Indiana Univ. Math. J.*, 70(3):1039–1054, 2021.
 - [20] Y. Kusakabe. Oka properties of complements of holomorphically convex sets. *Ann. of Math. (2)*, 199(2):899–917, 2024.
 - [21] Y. Kusakabe. Surjective morphisms onto subelliptic varieties. arXiv:2212.06412
 - [22] F. Lárusson. Model structures and the Oka principle. *J. Pure Appl. Algebra*, 192(1-3):203–223, 2004.
 - [23] F. Lárusson. Mapping cylinders and the Oka principle. *Indiana Univ. Math. J.*, 54(4):1145–1159, 2005.
 - [24] F. Lárusson and T. T. Truong. Algebraic subellipticity and dominability of blow-ups of affine spaces. *Doc. Math.*, 22:151–163, 2017.
 - [25] F. Lárusson and T. T. Truong. Approximation and interpolation of regular maps from affine varieties to algebraic manifolds. *Math. Scand.*, 125(2):199–209, 2019.
 - [26] K. Oka. Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. III. Deuxième problème de Cousin. *J. Sci. Hiroshima Univ.*, 9:7–19, 1939.
 - [27] J.-P. Rosay and W. Rudin. Holomorphic maps from $\mathbf{C}^n$ to $\mathbf{C}^n$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 310(1):47–86, 1988.
 - [28] J. Schürmann. Embeddings of Stein spaces into affine spaces of minimal dimension. *Math. Ann.*, 307(3):381–399, 1997.
 - [29] Y.-T. Siu. A Hartogs type extension theorem for coherent analytic sheaves. *Ann. of Math. (2)*, 93:166–188, 1971.