

ポアンカレ予想の現状とこれから

松本幸夫 (学習院大客員研究員/東大名誉教授)

2025 年 1 月 14 日

1 はじめに

はじめにちょっとお断りしておきたいのですが・・・

講演の題名を考えた時点ではやや勢い込みまして、講演するまでには、滑らかな 4 次元多様体について何か結果が出せると思っていたのですが、思うように行きませんでした。

そこで、題名はそのまま、講演の内容を次のように変更させていただきます。どうもすみません。

講演の内容

前半 (section 2) では ポアンカレ予想を中心としたトポロジーの歴史の (私的) 概観

後半 (section 3) では 余次元 2 の手術理論と 4 次元多様体の特別な性質

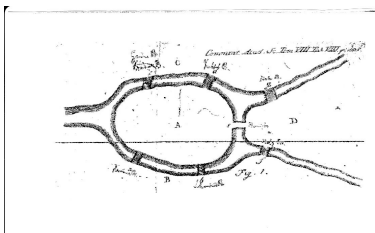
この、2 番目の主題には私の「研究者人生」の大半をつぎ込んでしまいましたので、私的思い出話などが混じることをお許しください。

2 ポアンカレ予想を中心としたトポロジーの歴史の (私的) 概観

トポロジーはいつ始まったか? スペインの数学者 J. M. Montesinos は、それは 1736 年 4 月 3 日以降のある日である、と言っている。L. Euler (1707 – 1783) が「7 本橋の問題」の解をペテルスブルクのアカデミーに提出したのがこのころであることがその理由である。

オイラーはその論文の序文に、G. W. Leibnitz (1646 – 1716) のいう Geometria situs (Analysis situs) の内容を定義している。オイラーによれば、「この分野は位置の決定とそれらの性質のみをあつかう」そして「量や量の計算には関わらない」

ケーニッヒスベルクの 7 本橋 (オイラーの 1736 年の論文から)



オイラーは、前ページの 7 本橋を「一筆書き」ですべて渡りきることはできないことを証明した。

Euler の多面体公式

3 次元球体と同相な多面体 P の表面 (faces) F , 稜 (edges) の数を E , 頂点 (vertices) の数を V とすれば, これらの間に

$$V - E + F = 2$$

という関係がある。(2 は球面の Euler 標数)

オイラーの原論文を見ると, 上の公式は現れず, 常に

$$V + F = E + 2$$

という公式に終始している。そうすると, 「オイラーには Euler 標数の認識がなかった」と言えるかもしれない。

C. F. Gauss (1777 – 1855)

「曲面についての一般研究」(Disquisitiones generales circa superficies curvas, 1827)

この論文全編の和訳が, 寺阪英孝・静間良次 「19 世紀の数学 幾何学 II」 に載せられている。

Gauss map の定義: 曲面 $F \subset \mathbf{R}^3$.

点 $p \in F$ に対して, p において, F に立てた単位法線ベクトル n_p を原点にまで平行移動したときの n_p の先端の点 p' ($\in S^2$) を対応させる写像:

$$F \rightarrow S^2, \quad p \mapsto p' \quad (\text{Gauss map})$$

点 $p \in F$ の周りの F の微小面積とそれを Gauss map で S^2 に移した時の p' の周りの微小面積の比 (符号付き) が, 点 $p \in F$ における**全曲率** (Gauss 曲率) $K(p)$.

「曲面についての一般研究」の第 12 節:

全曲率 $K(p)$ は点 $p \in F$ における曲面の**第 1 基本形式**

$$Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$$

だけで決まることを証明している。Gauss はこれが大変気に入って, 「抜群の定理 (theorema egregium)」と呼んでいる。また, 曲面 F 上に, 各辺が測地線からなる「曲がった m 角形」 D があって, その各頂点での外角が $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ であるとき, D 上での全曲率 $K(p)$ の積分を計算している:

$$\int_D K(p) d\sigma = 2\pi - \sum_{i=1}^m \alpha_i \quad \text{Gauss - Bonnet の公式}$$

閉曲面 S 上で $K(p)$ を積分すると, Gauss-Bonnet の公式から直ちに

$$\int_S K(p) d\sigma = 2\pi \chi(S) \quad (\chi(S) \text{ は } S \text{ の Euler 標数})$$

が得られる。(Gauss 自身はこの等式に言及していない。もしかすると, Gauss には Euler 標数の認識がなかったかもしれない。)

そのかわり、3次元空間のなかの2つの閉曲線 C_1, C_2 の間の「まつわり数 (linking number)」については、その積分表示を与えたうえで、

「ここに、位置の幾何 (Geometria situs) と量の幾何 (Geometria magnitudinis) の境界領域の基本問題の一つがある」といっている。

やはり、Euler 標数については認識がなかったか？

B. Listing (1808 – 1882)

1832年の冬から、ガウスの助手として天文台で働くことになり、ガウスから「位置の幾何」についていろいろと話をきいた。この人が「トポロジー」という言葉を作った。1847年に出版された著書「トポロジーの基礎研究 (Vorstudien zur Topologie)」のなかで、Leibniz が指摘した、幾何学の、「量的側面」でない「様態的側面」を研究する分野として、「トポロジー」(Topologie) という語を提唱したいと言っている。本の内容：座標の向き付け、らせんの右巻き、左巻きの区別、結び目の表示、グラフの一筆書きなど。

G. F. B. Riemann (1826 – 1866)

1変数の複素関数の「住みか」として、リーマン面の概念を創出した。リーマン面は向き付けられた閉曲面である。J. Stillwell によると、1850年代から1880年代にかけて、オイラー標数 $\chi(S)$ により閉曲面 S の位相的分類ができるという認識が共有されるようになったという。リーマンは閉曲面の概念を高次元化して、 n 次元多様体の概念を提出した。(Einstein の一般相対論への影響)

全集の第 XXIX 論文に、Analysis situs に関する断片がある。

1862年11月から病氣療養のため、しばしばイタリアを訪れ、E. Betti (1823 – 1892) と交流。Betti がのちに「ベッチ数」と呼ばれる位相不変量を定義したのは、もしかすると Riemann の影響があるかも知れない。

ポアンカレの Analysis Situs (位置解析)

J-H. Poincaré (1854 – 1912)

エコール・ポリテクニクの100年記念号の巻頭論文 Analysis situs *Journ. de L'École Polytech.* 2^e série, 1^{er} cahier, 1895の序文のなかで、

3次元より高い次元の力学には対象がないが、3次元より高い次元の幾何学には対象がある……その相対的位置関係を研究する「位置解析」の重要性を強調。

この論文の内容：

ホモロジーの導入： q 次元多様体の境界が λ 個の $q-1$ 次元多様体 $v_1, v_2, \dots, v_\lambda$ からなるとき、記号で

$$v_1 + v_2 + \dots + v_\lambda \sim 0$$

と書く。

更にベッチ数の導入

多様体 V の中の m 次元多様体 $v_1, v_2, \dots, v_\lambda$ の間に整数係数のホモロジーが存在しないとき、これらの m 次元多様体は1次独立であるという。 V の中に、1次独立な閉じた多様体が $P_m - 1$ 個存在し、かつ $P_m - 1$ 個しか存在しないとき、 V の連結数は P_m であるという。

V の次元が m ならば、連結数 $P_1, P_2, \dots, P_m$ が考えられるが、今後これをベッチ数と呼ぶ、といっている。ただし、今日使われている r 次元ベッチ数 b_r は $P_r - 1$ のこと。

$$b_r = P_r - 1.$$

ポアンカレの双対定理

h 次元の向き付け可能な閉じた多様体について、

$$P_p = P_{h-p}$$

が成り立つ。(交点数を用いた証明)

基本群の導入 (基本群が自明な多様体を単連結とよぶ)

オイラーの多面体定理の拡張

多様体 V を α_0 個の点, α_1 個の線分, $\dots$, α_p 個の p 次元多様体 (ベッチ数が自明なものにする必要があるが $\dots$) に分割し、交代和

$$N = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \dots \pm \alpha_p$$

を考えると、分割の仕方によらない整数がきまる。

オイラー・ポアンカレの公式

p 次元多様体を分割したときの N はベッチ数を使って次のように表される (現代風に書けば)

$$N = \sum_{h=0}^p (-1)^h b_h.$$

「位置解析」に五つの補足を書いた： 1899, 1900, 1902, 1902, 1904

第5の補足の内容： ホモロジーでは多様体の同相類が決まらない反例：例えば、次のポアンカレ球面。

ポアンカレ球面： ホモロジーが消えていて、基本群が自明にならない3次元多様体の構成

(基本群は binary-icosahedral group, オーダー 120 の有限群)

ポアンカレ予想：基本群が消えている閉じた3次元多様体は

S^3 (3次元球面) に限るか？

ポアンカレ (1854–1912) の肖像



ポアンカレ以降で、とくに取り上げたい数学者として：

H. C. Marston Morse (1892 – 1977)

◎ 多様体上の Morse function (臨界点为非退化な関数) によって, 多様体が分解できる.

Morse の不等式:

コンパクト多様体 M 上の Morse 関数 f , b_λ は M の λ 次元のベッチ数, M_λ は f の指数 λ の臨界点の個数とすると

$$M_\lambda - M_{\lambda-1} + \cdots + (-1)^\lambda M_0 \geq b_\lambda - b_{\lambda-1} + \cdots + (-1)^\lambda b_0.$$

Morse の仕事は, のちに Smale による高次元ポアンカレ予想の解決の基礎となった.

もう一人重要な数学者として

Hassler Whitney (1907 – 1989)

◎ n 次元の多様体は $2n$ 次元のユークリッド空間 $\mathbb{R}^{2n}$ にはめ込める (immersible), また, $2n + 1$ 次元のユークリッド空間 $\mathbb{R}^{2n+1}$ に埋め込める (embeddable).

◎ Whitney's trick: 2 つの n 次元多様体が $2n$ 次元空間 $\mathbb{R}^{2n}$ のなかで, 横断的に交わっているとき, 交わりの符号が異なる二つの交わりをペアで外すテクニック (後の微分位相幾何学で基本的):

微分位相幾何学 (differential topology) の始まり

S. Smale (1930 –)による高次元ポアンカレ予想の解決:

◎ 閉じた m 次元微分可能多様体 M が球面 S^m と同じホモトピー型を持てば, M は S^m と同相 (homeomorphic) である. ただし, $m \geq 5$ とする.

S. Smale, *Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four*, Ann. Math., 74, 1961, 391–406.

◎ h -同境定理 (h -cobordism theorem): $m \geq 5$ とする. 2 つの閉じた単連結な m 次元多様体 M_1 と M_2 が h -同境であれば, それらは微分同相である.

J. Milnor, *Lectures on the h -cobordism theorem* (notes by L. Siebenmann and J. Sondow) Princeton U. Press. 1965

John W. Milnor (1931 –)による異種球面の発見:

◎ 7 次元球面 S^7 には複数の (互いに微分同相にならない) 微分構造が入る. (28 個入る.)

J. W. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Ann. of Math., 64, (1956), 399 – 405.

M. A. Kervaire and J. W. Milnor, *Groups of homotopy spheres I*, Ann. of Math., 77, (1963), 504 – 537.

Kervaire - Milnor の論文の後をうけて「多様体の手術理論」が始まる.

手術理論の発展

S. P. Novikov, W. Browder, D. Sullivan,

手術理論は C. T. C. Wall (1936 –) により頂点に達する:

多様体の手術 (surgery) とは

m 次元多様体 M^m に埋め込まれた $(k-1)$ 次元球面の管状近傍 $S^{k-1} \times D^{m-k+1}$ を取り除き, その代わりに k -ハンドル $D^k \times D^{m-k+1}$ を取り付けて,

$$M' = M - \text{int}(S^{k-1} \times D^{m-k+1}) \cup D^k \times S^{m-k}$$

に改変する操作, $(k = 1, 2, \dots, [\frac{m}{2}])$.

C. T. C. Wall の手術理論

C. T. C. Wall, *Surgery on Compact Manifolds*, Academic Press, 1970.

n 次元多様体 M を手術 (surgery) で変えて行くときの障害 (obstruction) を定式化した.

ポアンカレ双対定理を満たす CW 複体 X と, 位数 1 の連続写像

$$f : M \rightarrow X$$

を与えておき, M を手術で変形して M' にして, 対応する写像

$$f' : M' \rightarrow X$$

をホモトピー同値にするための障害を定式化した.

手術の障害 $\mathcal{O}(f)$ は **Wall 群**と呼ばれるアーベル群 $L_n(\pi)$ に入る:

$$\mathcal{O}(f) \in L_n(\pi).$$

Wall 群は純代数的に定義される群であり, その計算を遂行する分野を「代数的 L 理論」という.

$L_n(\pi)$ は群 π と $n \bmod 4$ で決まる.

簡単な例:

$\pi = \{1\}$ (trivial group) の場合.

$$L_0(\{1\}) = \mathbb{Z}, L_1(\{1\}) = \{0\}, L_2(\{1\}) = \mathbb{Z}_2, L_3(\{1\}) = \{0\}.$$

$\pi = \mathbb{Z}$ の場合.

$$L_0(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, L_1(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, L_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2, L_3(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2.$$

など.

基本予想 (高次元多様体について)

PL 多様体 (piecewise-linear manifold) とは: 単体的複体の構造を持つ n 次元多様体で, 各点の近傍は n 次元円板と PL 同形 (細分することを許して同形).

基本予想 (Hauptvermutung): 二つの PL 多様体 M と N が位相同形 (homeomorphic) ならば, それらは PL 同形か?

非常に基本的であるが, 永らく未解決であった基本予想が, 高次元の微分位相幾何学の発展を受けて,

1969 年に R. Kirby(1938 -) と L. C. Siebenmann(1939 -) により 完全に解決された (5 次元以上の PL 多様体に関して).

ただし、多様体でなければ反例がある (J. Milnor による) :

Milnor による基本予想の反例:

J. Milnor, *Two complexes that are homeomorphic but combinatorially distinct*, Ann. Math., 74, (1961).

まず、**レンズ空間**: $L(p, q)$ から出発する:

3次元球面 S^3 を以下の次ように定める: $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$.

(p, q) を互いに素な自然数の対とし, ω を原始 p 乗根とする.

同値関係 $(z_1, z_2) \sim (\omega z_1, \omega^q z_2)$ により S^3 を割った商空間

$$S^3 / \sim$$

がレンズ空間 $L(p, q)$ である.

J. H. C. Whitehead と K. Reidemeister の結果を使えば, $L(7, 1)$ と $L(7, 2)$ はホモトピー同値だが **PL 同形ではない**ことが分かる.

B. Mazur (整数論に転向する前) の結果により, $n \geq 3$ ならば,

$$L(7, 1) \times \mathbb{R}^n \cong L(7, 2) \times \mathbb{R}^n \quad (\text{PL 同形}).$$

左右の空間に無限遠点を付け加えて「1点コンパクト化」したものを

$$X_1, X_2$$

とすると, それらは**位相同形**だが, 「de Rham torsion (ド・ラームのねじれ)」と呼ばれる不変量によって X_1 と X_2 は **PL 同形にならない**ことが証明される.

以上が, **Milnor による基本予想の反例**の構成である.

X_1 と X_2 には1点コンパクト化した「頂点」のところに「特異点」があるので, PL 多様体ではない.

Kirby-Siebenmann の定理:

M を5次元以上の位相多様体とする. M に PL 多様体の構造を入れるための障害は4次元コホモロジー群

$$H^4(M; \mathbb{Z}_2)$$

のなかのひとつの元である. また, M 上の2つの PL 構造が連続変形に移りあうための障害は3次元コホモロジー群

$$H^3(M; \mathbb{Z}_2)$$

のなかのひとつの元である.

R. C. Kirby and L. C. Siebenmann, *On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung*, Bull. A. M. S. 75 (1969), 742 – 749.

系: 4次元以下のホモトピー群が消えているような高次元位相多様体には唯一つの PL 構造が入る.

V. A. Rochlin の定理:

定理: 向き付けられた4次元閉多様体 M^4 が「スピン構造」をもてば, **その符号数 (signature) は16で割り切れる.**

M^4 が「スピン構造」を持つことと、 M^4 の第 2 Stiefel-Whitney 類が消えること ($w_2(M^4) = 0$) とは同値である。

Rochlin の原論文: **V. A. Rochlin**, *New results in the theory of 4-dimensional manifolds* (Russian), **Dokl. Akad. Nauk. SSSR**, **84** (1952), **221 – 224**:

はロシア語のうえ、きちんと証明が書かれていない。

いろいろな人が証明を試みたが、私も「初等的な」証明をした:

Y. Matsumoto, *An elementary proof of Rochlin's signature theorem and its extension by Guillow and Marin*, in *A la Recherche de la Topologie Perdue*, Progress in Math. Vol. 62, 1986 Birkhäuser Boston, 1986.

Kirby-Siebenmann の定理で、高次元の位相多様体 M に PL 構造を入れる障害元が $H^4(M; \mathbb{Z}_2)$ に属することと、高次元位相多様体 M に 2 つの PL 構造があるとき、それらが PL 同相になるための障害元が $H^3(M; \mathbb{Z}_2)$ に入ることをみた。

これらの障害は **Rochlin の定理 (4 次元の定理!)** に由来することを見よう。

E_8 型の Dynkin 図式にそって、 S^2 上の D^2 バンドルのコピー 8 個を張り合わせる。

こうしてできた 4 次元多様体 $M(E_8)$ の境界 (これはホモロジー 3 球面 P^3 である) の上に cone を立てる。頂点は特異点になる。 $X^4 = M(E_8) \cup \text{Cone over } P^3$ 。

$X^4 \times S^1$ は位相多様体であるが、**PL 多様体と位相同形にならない。**

証明: もし、 $X^4 \times S^1$ が何らかの 5 次元 PL 多様体 N^5 と位相同形になれば、 N^5 のなかに、 $w_2(L^4) = 0$ であるような PL 多様体で、その符号数が (E_8 と同じく) 8 であるような 4 次元多様体 L^4 が構成されてしまい、Rochlin の定理に矛盾する。 (**Rochlin の定理が、位相多様体 $X^4 \times S^1$ 上に PL 多様体の構造が入ることを邪魔している。**)

G. Perelman による 3 次元ポアンカレ予想の最終的解決

「ペレルマン (G. Perelman) が古典的な 3 次元ポアンカレ予想を解いた」という噂を初めて聞いたのは、2002 年 12 月にメキシコで開かれた低次元トポロジーのシンポジウムでだった。ペレルマンの証明は、1982 年に R. Hamilton より提唱された「リーマン計量をリッチ・フローで流す」という方法。そうすれば「最終的に綺麗な計量に収束するだろう」というもの。

ペレルマンは 3 次元ポアンカレ予想ばかりでなく、3 次元多様体の上に種々の幾何構造を入れる **サーストンの幾何化予想** も完全に解決した。

ペレルマンの論文:

G. Perelman, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications,

<http://arxiv.org/abs/math/0211159.2002>

など、あと 2 つがネット上にある。

3 余次元 2 の手術理論と 4 次元多様体の特別な性質

次元差 (余次元) 2 のトポロジー

多様体 M^m とその中の部分多様体 K^k があるとき, 2つの多様体の次元差 $m-k$ を **余次元 (codimension)** という. 部分多様体のトポロジーを考えると, 余次元 $m-k$ が大きな意味を持つ.

余次元が 3 以上 ($m-k \geq 3$) であれば,

$$\pi_1(M-K) \cong \pi_1(M).$$

余次元が 2 であれば, 一般に

$$\pi_1(M-K) \not\cong \pi_1(M).$$

K^k の周りを 1 周するループ t は

$m-k \geq 3$ であれば, K^k の補集合 $M^m - K^k$ の中で 1 点に縮むが,

$m-k = 2$ であれば, 一般には t は縮まない.

このことが, 余次元 2 のトポロジーを難しくしている.

例えば, 円周 S^1 が 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれるとき, 余次元が 2 ($\dim \mathbb{R}^3 - \dim S^1 = 2$) なので, 様々な複雑な「結び目」が生まれるが, 円周 S^1 が 4 次元以上の空間 $\mathbb{R}^m$ ($m \geq 4$) に埋め込まれるときは, 余次元が 3 以上 ($\dim \mathbb{R}^m - \dim S^1 \geq 3$) なので, みなほどけてしまう.

余次元 2 の手術理論

私の初めの研究は「余次元 2」の部分多様体の手術理論でした.

先に紹介した「手術理論」(Kervaire-Milnor に始まり, Wall により集大成された手術理論)は, 多様体 M をそれ自身として手術するもので, M は何かの部分多様体になっているとは仮定されていない.

また, M が別の多様体 W の部分多様体になっていても, その余次元が 3 以上であれば ($\dim W - \dim M \geq 3$), ほぼ「部分多様体であることを考慮せずに」 W のなかで M の手術ができる.

しかし, 余次元が 2 の場合 ($\dim W - \dim M = 2$), M の基本群 $\pi' = \pi_1(M)$ と補空間の基本群 $\pi = \pi_1(W-M)$ の両方を考慮した理論を考える必要がある.

まず, その頃の思い出話を少し・・・

そのころ, 現在九州大学の名誉教授の加藤十吉 (みつよし) 先生がプリンストンの研究所に滞在されていた. 加藤先生は私とは年が 2 歳しか違わないのに, すでに世界的に有名になっていた.

加藤さんは修士課程をでる前に **prebundle の理論**を始めていて, これは当時の Rouke-Sanderson の **block bundle の理論** (Annals 論文) と等価だった.

加藤さんの論文のほうが 1 年早かった.

加藤さんと一緒に「高次元多様体の中の, 次元が 2 だけ低い部分多様体を (部分多様体として) 手術する理論」(余次元 2 の手術理論)を始めた.

加藤さんとの共著 (単連結の場合):

M. Kato and Y. Matsumoto, *Simply connected surgery of submanifolds in codimension two*, J. Math. Soc. Japan, **24** (1972), 586–608.

その続きとして

単著 (非単連結の場合):

Y. Matsumoto, *Knot cobordism groups and surgery in codimension two*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **20** (1973), 253–317.

これが私の博士論文になった.

博士論文で扱った状況:

$m \geq 5$ とする. $m+2$ 次元のコンパクトで (向き付け可能な) 多様体 W^{m+2} に境界 ∂W^{m+2} があるとす
る. そして, W^{m+2} は m 次元のコンパクト閉多様体 M^m にホモトピー同値であるとする:

$$W^{m+2} \simeq M^m.$$

このとき, W^{m+2} のなかに m 次元部分多様体 L^m をみつけて,

$$L^m \simeq W^{m+2} (\simeq M^m)$$

となるようにできるか, を問題にした.

このような性質をもつ部分多様体 L^m を W^{m+2} の **スパイン** (spine) という. 上のような状況下で, W^{m+2} の内部に, M^m に degree 1 でうつる部分多様体 K^m をみつけ, W^{m+2} の内部で K^m を手術して行き, 包含写像

$$K^m \hookrightarrow W^{m+2} (\simeq M^m)$$

をホモトピー同値写像にすること (K^m を W^{m+2} のスパインにすること) を目指す.

W^{m+2} の内部で, K^m に「余次元 2 の手術」を施すわけである.

上のような状況下で, K^m に予備的な手術をおこなって, 次のような完全系列が成り立つようにすることができる:

$$1 \rightarrow C \rightarrow \pi_1(W - K) \rightarrow \pi_1(W) \rightarrow 1.$$

ここで, C は K の周りを一回りする円周 t で生成される (有限または無限の) 巡回群 (C は $\pi_1(W - K)$ の center に入っている).

上の完全系列を簡単に

$$(*) \quad 1 \rightarrow C \rightarrow \pi \rightarrow \pi' \rightarrow 1$$

と書く. ($C \subset \pi$ の center.)

私の博士論文の主定理は次のようなものでした:

定理: 完全系列 (*) から純代数的にきまる可換な障害群 $P_m(\pi' \rightarrow \pi)$ とその中の元 $\eta(W)$ があって,

$$W \supset \exists L^m \simeq M^m \iff \eta(W) = 0.$$

ここに現れた障害群 $P_m(\pi' \rightarrow \pi)$ の計算は難しく, 現在でもほとんどできていません. (「代数的 L 理論」を少し拡張したバージョン)

いくつかの例:

$$P_{2k+1}(\pi \rightarrow \pi') \cong L_{2k+1}(\pi') \quad (\text{Wall の } L \text{ 群})$$

$$P_m(\pi \xrightarrow{\text{id}} \pi) \cong L_m(\pi)$$

$$P_m(\mathbb{Z} \rightarrow 1) \cong C_{m-1} \quad (m \geq 5) \quad (\text{結び目同境界群})$$

などです.

余次元 2 の手術理論の応用として・・・

この理論自身は高次元の結果だったが, 応用として, 偶然次のような 4 次元多様体 W^4 を見つけた:

W^4 はコンパクトで, 2 次元トーラス T^2 とホモトピー同値である

$$W^4 \simeq T^2$$

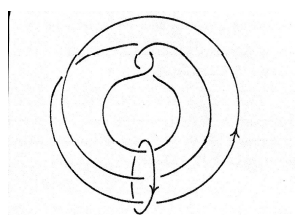
しかし, W^4 のなかには, 包含写像 $T' \subset W^4$ がホモトピー同値になるような PL トーラス T' が含まれていない.

証明は直積 $W^4 \times \mathbb{C}P^2$ をとって高次元の話に持ち込む.

Y. Matsumoto, *A 4-manifold which admits no spine*, Bull. Amer. Math. Soc., **81** (1975) 467–470.

これが, 4 次元多様体に興味をもつきっかけになった.

その構成に使ったのは, 円周 S^1 のソリッド・トーラス $S^1 \times D^2$ への特別な埋め込み (Mazur の embedding と呼ばれている) である.



ソリッド・トーラス $S^1 \times D^2$ のなかの円周 S^1 を細いソリッド・トーラス V にして, トーラスの埋め込み

$$V \hookrightarrow S^1 \times D^2$$

を考える. その「mapping torus」を作り, それを W^4 とする:

すなわち, 直積 $(S^1 \times D^2) \times [0, 1]$ を作り, 「左端」の $S^1 \times D^2 \times \{0\}$ を「右端」 $S^1 \times D^2 \times \{1\}$ に埋まっている $V \times \{1\}$ に張り合わせる.

こうして得られた 4 次元多様体を W^4 とすると, $W^4 \simeq T^2$ であるが, W^4 のなかには, T^2 を (たとえ PL 特異点を許しても) W^4 とホモトピー同値となるようには埋め込めない.

その証明は次のようにする: W^4 と複素射影空間 $\mathbb{C}P^2$ 直積 $W^4 \times \mathbb{C}P^2$ をとると, これは $T^2 \times \mathbb{C}P^2$ と同じホモトピー型をもつ 8 次元多様体になるが, その中にはスパインが存在しないことを, 高次元の「余次元 2 の手術理論」の障害を計算して示す.

こうして構成した「spineless 4-manifold」はかなり関心をあつめた.

1976~7 年頃, Charles Giffen が W^4 の中には T^2 の wild topological embedding (グシャグシャな埋め込み) があって, ホモトピー同値 $W^4 \simeq T^2$ が実現されることを示した. (Giffen の論文がどこに出ているか知らない.)

Giffen のテクニックをつかうと, 高次元の PL 多様体の余次元 2 の wild topological embedding (で, PL 埋め込みでは近似できないもの) が構成できることを示した:

Y. Matsumoto, *Wild embeddings of piecewise linear manifolds in codimension two*, Geometric Topology, ed. by J. Cantrell, Academic Press, 393 – 428 (1979).

また、同じころ、S. Cappell と J. Shaneson が余次元 2 のトポロジーを精力的に推し進めていた。

ちょっと後日談

2018 年に A. Levine という数学者から

S^2 とホモトピー同値なコンパクト 4 次元多様体 $W^4 \simeq S^2$ であって、 W^4 のなかには、包含写像 $S' \subset W^4$ がホモトピー同値になるような PL 球面 S' が含まれていないものを見つけた

という連絡があり、私の場合の T^2 が種数 0 の S^2 で置き換えられたので驚いた。

証明にはオジュヴァート・サボアの理論が使われる：

P. Ozsváth and Z. Szabó, *Absolutely graded Floer homologies and Intersection forms for four-manifolds with boundary*, Advances in Math. **173** (2003), 179–261.

レヴィン達の論文は

A. S. Levine and T. Lidman, *Simply connected, spineless 4-manifolds*, Forum Math., Sigma (2019), **7**, e14, 1–11.

さらに 1 年後に D. Ruberman から連絡があり、Levine-Lidman の多様体には Topological sine が含まれていると言ってきた。これにもびっくりした：

H. J. Kim and D. Ruberman, *Topological spines of 4-manifolds*, Algebr. Geom. Topol. **20** (2020), no. 7, 3589 – 3606.

レヴィン達の論文の簡単な解説を：

松本, 「トポロジーへの誘い (新装版) ; 多様体と次元をめぐる」日本評論社, 2021. の第 ∞ 章に書きましたので、ご覧ください。

後日談を終わって、また約 50 年前の思い出話に戻ります。

プリンストン研究所に滞在する (1976–1978)

加藤十吉さんが滞在していたプリンストンの研究所に憧れて、修士課程をですぐアプリケーション・フォームを送ったが、書いた論文が修士論文しかなかったので、断られた。私も妻もがっかりした。(私は結婚が早く、修士を出てもまもなく結婚していましたので・・・) 博士論文を書いたり、勤め先の業務をこなしたりして数年がたった。(日本に帰っていた加藤さんに発破をかけられて) **1975 年に再度アプライして、1976 年の 3 月ごろ OK が来た**

8 月にスタンフォード大学での大きなシンポジウムがあり、松本堯生氏と一緒に参加したあと単身プリンストンに行く。後から来た妻と 5 歳の娘と合流して一家がそろったのは 9 月ごろ。

その年 (1976 年) は、研究所に日本からの研究者が多く来ていて、楽しかった：

滞在 2 年目の木村達雄氏、私と同じく、この年から滞在の内田興二氏、川中宣明氏、小池正夫氏、また、哲学者の吉田夏彦先生、ニューヨーク大学の久賀道郎先生。

また、プリンストン大学には、岩澤健吉先生、志村五郎先生がいらっしゃって、何かとお世話になった。

また、翌年（1977 年）日本から来た研究者は、後藤守邦先生、後藤ミドリ氏、峰村勝弘氏、河合隆裕氏、柏原正樹氏、太田雅巳氏、物理学者の岩崎洋一氏。

当時は日本の大学も鷹揚で、2 年間の海外出張が可能だった。しかし、プリンストンの研究所が問題で、滞在は原則 1 年。良い結果が出れば 2 年可能。

1 年目に頑張ったが、良い結果なし。（「Rohlin の定理の初等的証明」というのだけ）

2 年の滞在を希望する者は、研究所の（専門に近い）教授に 1 年目の成果を説明に行かなければならない。

J. Milnor のところに行って、「ここでは良い結果が出ませんでした」といって、日本でやった余次元 2 の手術理論などを説明した。Milnor は「フンフン」と聴いてくれたが、とくに反応はなく、「ハイ終わりです」という感じで終わった。（これじゃダメだと思った）

その後、研究所から何の連絡もなく、ただ待たされた。

2 か月後くらいに「補欠にします」という連絡があって嬉しかった。

さらに待たされて翌年の 5 月ごろになってしまった。志村先生が「遠慮しないで誰かに聞いてみなさい」というので、優しいようなモンゴメリー先生にきいてみると、「まあ、大丈夫だよ」という返事だった。すこしホッとして、吉田夏彦先生夫妻と一緒にナイアガラの滝を見に行っただけのもこの頃である。

1977 年の 6 月に 2 年目の滞在を認める通知が来た！

プリンストンでの 2 年間

◎ W. Thurston が 3 次元多様体上の幾何構造に関する理論を開始。講義を聴講できた。

◎ アメリカ南部 (?) から来ていた G. A. Venema という若い数学者と知り合って、共著論文を書いた。（デーンの補題が 4 次元では成り立たない反例）

Y. Matsumoto and G. A. Venema, *Failure of the Dehn lemma on contractible 4-manifolds*, Invent. Math., **51** (1979) 205 – 218.

◎ スペインから来ていた José María Montesinos-Amilibia と仲良くなった。（彼も私も英語が下手。数学の好みが何となくにていた。なお、上の論文の題名は Montesinos が考えてくれた。）

◎ きな臭さを増していた「Casson のハンドル」についての連続セミナーをやった（1978 年 Montesinos, Venema, W.C. Hsiang, P. Pao, それに私）。

◎ やはりプリンストンに滞在していた Siebenman が世話してくれて、Montesinos と私がフランスの I.H.E.S に 1 か月間（1978 年の 5 月）、滞在できるようにしてくれた。

Marston Morse (1892 – 1977) の思い出

私がプリンストンに滞在中、Morse 理論の Marston Morse はご存命だった。彼の研究室を訪ねて、話を聞いたことがある。帰るときにいくつか新しい論文の別刷りをもらった。

その後、研究所に滞在中の何人かの人達を、自宅のパーティーに招いてくれて、そのとき、自らピアノをひいてくれた。

1977 年に亡くなったとき、お葬式はプリンストン大学構内の教会で執り行われた。

参列者に挨拶しているモース夫人をみて急に涙が止まらなくなった記憶がある。

4 次元トポロジーの大発展

1978 年 8 月にプリンストンから帰る。M. Freedman が位相的カテゴリーで 4 次元ポアンカレ予想を解いた。さらに、単連結な 4 次元閉多様体の位相的分類に成功した（Casson ハンドルの応用）

M. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Diff. Geom. **17** (1982) 357 – 453.

S. Donaldson が、4 次元の微分可能多様体の交叉形式が正定値なら対角形式 $(1) \oplus (1) \oplus \cdots \oplus (1)$ に限ることを証明した。

S. Donaldson, *An application of gauge theory to four dimensional topology*, J. Diff. Geom. **18** (1983) 279–315.

この二つの結果にショックを受けた。

はじめてゲージ理論というのを知って、一生懸命勉強した。

大学院でも講義してみた。(1985 年の講義ノートが残っている.)

ドナルドソン理論の影響は甚大で、それまで解決不可能に見えた問題がいろいろ解決された。例えば：

$S^2 \times S^2$ の中のどのホモロジー類が滑らかに埋め込まれた S^2 で表せるか、という問題は久我健一氏によって解かれた：

K. Kuga, *Representing homology classes of $S^2 \times S^2$* , Topology **23** (1984), 133–137.

N. Seiberg- E. Witten の理論.

1990 年代になって、Donaldson 理論と等価といわれる Seiberg-Witten の理論が現れた。この理論では依拠する構造群が $U(1)$ であり、ドナルドソン理論の $SU(2)$ よりずっと扱いやすいので、こちらのほうがゲージ理論の主流になった。

有名な応用に、古田幹雄氏の $\frac{10}{8}$ 定理がある：

定理. 滑らかで閉じた 4 次元多様体 M がスピン構造を持ち、かつ第 2 ベッチ数 b_2 がゼロでなければ、不等式

$$b_2(M) \geq \frac{5}{4} |\text{Sign}(M)| + 2$$

が成り立つ。

$K3$ という複素曲面は上の式の等号を成り立たせる 4 次元閉多様体になっている。($b_2 = 22$, $\text{Sign} = -16$.)

古田氏の論文は

M. Furuta, *Monopole equation and the $\frac{11}{8}$ conjecture*, Math. Res. Lett. **8** (2001), 279 – 291.

Donaldson 理論や Seiberg-Witten 理論についての詳しい解説は次の本をご覧ください：

上 正明・松本幸夫, 「4 次元多様体, I, II」, 朝倉数学体系, 朝倉書店, 2022.

「4 次元多様体とゲージ理論」は気になっている分野であり続けているものの、これから論文を書いてゆく分野としては少し難しすぎる印象をもった。そこで、もう少し「手作りっぽい」方法での研究を・・・

トーラスファイバー空間

曲面上の(特異ファイバーをもつ)トーラスバンドルの全空間を 4 次元多様体として研究することが手始めとなった：

その手ごろな実例は、代数幾何で研究されていた「楕円曲面」である。

これはコンパクトな複素曲面で、複素曲線(すなわち、通常の意味の閉曲面)の上の特異点を持つ「ファイバー空間」である。有限本の特異ファイバーがある。

定理. 2 つの楕円曲面があり、それらの底空間の種数が等しく、全空間のオイラー数が等しければ、全空間は微分同相である。

Y. Matsumoto, *Diffeomorphism types of elliptic surfaces*, Topology **25** (1986) 549 – 563.

この論文では、「特異ファイバーを持つが、多重ファイバーは持たない」と仮定されている。

多重ファイバーを持つ場合は：

定理（上 証明）：多重ファイバーを 3 本以上持つ場合は、全空間の微分同相類は全空間のホモトピー型で決まる。

M. Ue, *On the diffeomorphism types of elliptic surfaces with multiple fibers*, Inventiones math. **84** (1986) 633 – 643.

なお、**多重ファイバーがちょうど 2 本の場合**には、楕円曲面の微分同相類がホモトピー型で決まらない例がある：

S. K. Donaldson, *La topologie différentielle des surfaces complexes*, C. R. Acad. Sci. **301** (1985) 317 – 320.

多重ファイバーがない場合の楕円曲面の微分同相類の証明は（かつて自分が経験したなかで）一番難しかったが、のちに鎌田聖一氏のチャート理論により大幅に簡易化された：

S. Kamada, Y. Matsumoto, T. Matsumoto, and K. Waki, *Chart description and a new proof of the classification theorem of genus one Lefschetz fibrations*, J. Math. Soc. Japan. **57** (2005), 537 – 555.

リーマン面の退化

プリンストンで親しくなった **José María Montesinos-Amilibia** に呼ばれて、初めてマドリードに行ったのは 1988 年。実は 1984 年に行くはずだったのに、（自宅の屋根から落ちて）大腿骨粉碎骨折というのをやっちゃって、4 年遅くなった。マドリードでは、書きかけの「**多様体の基礎**」（東大出版会）という本を書きあげようと思って、ずっと原稿を書いていたので、Montesinos との共同研究となった「**リーマン面の退化**」にとりかかったのは最後の 10 日間くらいだった。

なお、当時は TeX はまだ無くて、「多様体の基礎」の原稿もすべて原稿用紙に手書きだった。Email はこのころから少しずつ始まった。（マドリードで初めて見た。）

後日（1991 年）、再度マドリードに呼んでもらって、共著論文を書き上げた。当時の事務員の **Srta. María Angeles Bringas** が旧式のタイプライターで打ち上げてくれた。（感謝）

長さが 250 頁以上あったので、どこに投稿すべきか分からず、長い間ほっておいたが、そのうち、TeX が主流となり、古いタイプで打った我々の長い論文もそのままでは受け付けてもらえず、TeX で打ち直さなければならなくなった。

幸い、科研費が当たったので、それを使って業者に TeX で打ち直してもらった。投稿先もいろいろ相談して、結局 Springer の Lecture Notes に投稿したら受け付けてもらえた。（原稿ができてから 20 年後！）

Y. Matsumoto and J. M. Montesinos-Amilibia, *Pseudo-periodic maps and degeneration of Riemann surfaces*, Lecture Notes in Mathematics **2030**, Springer, 2011.

「リーマン面の退化」への興味はずっと続き、いくつか論文を書いた。例えば、

Y. Matsumoto, *The Deligne-Mumford compactification and crystallographic groups*, Handbook of Teichmüller Theory, Volume VII, Ed. by A. Papadopoulos (2020), 21 – 62.

この論文では、リーマン面のモジュライ空間の Deligne-Mumford コンパクト化に“orbifold charts”を構成した。

また、足利 正氏 との共著で、Deligne-Mumford コンパクト化の上にリーマン面の「普遍退化族」が構成できた。

T. Ashikaga and Y. Matsumoto, *Universal degeneration of Riemann surfaces and fibered complex surfaces*, Essays in Geometry, Dedicated to Norbert A'Campo, Ed. by A. Papadopoulos (2023), 179 – 262.

4 いま気になっている 4 次元関係の問題

「滑らかさを考慮した」4 次元ポアンカレ予想.

滑らかな 4 次元多様体 M が 4 次元球面と同じホモトピー型を持てば、それは S^4 に微分同相か？

$$M \simeq S^4 \stackrel{?}{\Rightarrow} M \cong S^4 \text{ (微分同相?)}$$

上に紹介した M. Freedman の定理により、

$$M \simeq S^4 \Rightarrow M \approx S^4 \text{ (位相同形)}$$

であることは知られている。

現在、これ以上の進展なし。

$\frac{11}{8}$ 予想.

スピン構造をもつ (i.e. $w_1(M) = w_2(M) = 0$ が成り立つような) 4 次元の閉じた多様体 M について

$$b_2(M) \geq \frac{11}{8} |\text{Sign}(M)|$$

が成り立つだろう。(M が複素曲面 K3 なら等号が成り立つ.)

これは次の論文の中で問題とした。

Y. Matsumoto, *On the bounding genus of homology 3-spheres*, J. Fac. Science, The Univ. Tokyo, Sec. IA, **29**, 287 –318, (1982).

この論文中 (p.289) で、 $b_2(M) < (11/8)|\sigma(M)|$ を満たす単連結で滑らかな 4 次元閉多様体 M (ただし $w_2(M) = 0$ を満たすもの) を見つけることは難しいという表現で、間接的に $\frac{11}{8}$ 予想を述べた。

現在のところ、先に述べた古田幹雄氏の $\frac{10}{8}$ 定理 が、 $\frac{11}{8}$ 予想に関する最良の結果である。

ホモロジー 3-球面の”bounding-genus”の決定、またはその評価。

3 次元の向き付けられた閉多様体 Σ がホモロジー 3-球面であるとは、

$$H_*(\Sigma; \mathbb{Z}) \cong H_*(S^3; \mathbb{Z})$$

が成り立つこと。

上にあげた論文中で、ホモロジー 3-球面 Σ に対して”bounding genus” $|\Sigma|$ という整数値 (ただし、 ∞ という値も許す) 不変量を導入した。

二つのホモロジー 3 球面 Σ_1 と Σ_2 が

ホモロジー・コボルダントである ($\Sigma_1 \sim \Sigma_2$) とは、4 次元の向き付けられたコンパクト 4 次元多様体 W が存在して、

$$\partial W = \Sigma_1 \cup (-\Sigma_2)$$

であり、かつ、包含写像 $\Sigma_i \rightarrow W$ がホモロジー群の同型を引き起こすこと：

$$H_*(\Sigma_i; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_*(W; \mathbb{Z}), \quad i = 1, 2.$$

3次元ホモロジー球面のコボルディズム群 Θ^3 (「連結和」によりアーベル群をなす.)

$$\Theta^3 = \{\text{homology 3-spheres}\} / \sim$$

Rochlin 不変量 $\rho : \Theta^3 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ の定義：

任意の 3次元ホモロジー球面 Σ をとる. $\Sigma = \partial V^4$ となる向きの付いた連結 4次元多様体 V^4 で、特性類 $w_2(V^4) = 0$ を満たすものをとると、符号数 $Sign(V^4)$ は 8 で割り切れる.

そこで

$$\rho(\Sigma) \stackrel{\text{def}}{=} Sign(V^4)/8 \pmod{2}$$

において、**Rohlin 不変量**

$$\rho : \Theta^3 \rightarrow \mathbb{Z}_2$$

を定義する.

アーベル群 Θ^3 の構造決定は非常に難しい.

実際、 Θ^3 は無限生成のアーベル群である.

M. Furuta, *Homology cobordism group of homology 3-spheres*, Invent. Math., **100** (1990) 339 – 355.

次の補題が証明できる：

補題. Rochlin 不変量 $\rho(\Sigma) = 0$ であるような 3次元ホモロジー球面 Σ は、 $w_2(V^4) = 0$ であるような向きの付いた連結 4次元多様体 V^4 の境界になるが、このとき、交叉形式

$$H_2(V^4) \times H_4(V^4) \rightarrow \mathbb{Z}$$

が、”hyperbolic pair” $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の n 個のコピーの直和になっているような V^4 が存在する.

ひとつの 3次元ホモロジー球面 Σ について、このような V^4 はユニークには決まらないが、上述の hyperbolic pair のコピーの数 n が最小であるような V^4 をとり、その最小値 n を Σ の bounding genus と呼ぶ.

記号:

3次元ホモロジー球面 Σ について、もし、その Rochlin 不変量が 0 ならば (i.e. $\rho(\Sigma) = 0$ ならば)、その bounding genus $|\Sigma|$ を上述の n の最小値とにおいて定義する：

$$|\Sigma| = n.$$

また、その Rochlin 不変量が 1 ならば、その bounding genus $|\Sigma|$ を ∞ とにおいて定義する：

$$|\Sigma| = \infty.$$

Bounding genus $|\Sigma|$ は 3次元ホモロジー球面の群 Θ^3 に一種の「ノルム」を与えるが、その実際の値の決定は難しい.

$$|\cdot| : \Theta^3 \rightarrow \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

($|\Sigma|$ の上からの評価 $|\Sigma| \leq k$ は比較的簡単. 下からの評価 $|\Sigma| \geq l$ が難しい.)

実例 (Brieskorn の 3 次元ホモロジー球面)

p, q, r を互いに素な 2 以上の整数とする.

$$\Sigma(p, q, r) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^3 \mid z_1^p + z_2^q + z_3^r = 0, \|\mathbf{z}\| = 1\}.$$

Bounding genus の上からの評価はいろいろできる:

$$|\Sigma(2, 3, 12k \pm 1)| \leq 1$$

$$|\Sigma(2, 5, 20k \pm 1)| \leq 1$$

$$|\Sigma(2, 5, 20k \pm 7)| \leq 1$$

$$|\Sigma(2, 7, 28k \pm 13)| \leq 3$$

$$|\Sigma(2, 9, 36k \pm 17)| \leq 4.$$

など. しかし, 下からの評価が難しい.

(単なる評価ではなく) **bounding genus が完全に決定された無限列**は次の二つだけ.

$$|\Sigma(2, 7, 14m - 1)| = 3, \quad (m \text{ は任意の奇の自然数}), \quad |\Sigma(2, 3, 12k - 1)| = 1, \quad (k \text{ は任意の自然数}).$$

この二つは**福本善洋氏**の結果である.

Y. Fukumoto, *The bounding genera and w-invariants*, Proc. Amer. Math. Soc. **137**, (2009).

なお, $|\Sigma(2, 3, 12k - 1)| = 1$ (k は任意の自然数) は R. Fintushel and R. J. Stern の論文

R. Fintushel and R. J. Stern, Pseudo-free orbifolds, Ann. Math., **122**, (1985) と上の評価からも証明できる.

5 終わりの言葉

最近, いろいろ興味をもって考えてきたことが一段落した感じがあります.

これからは自由な時間がいっぱい(?) あるはずですので, 前から気になっている「4 次元多様体とゲージ理論」について, よく考えてみたいと思います.

幸い, 微分幾何が専門の学習院大学の山田澄生氏のご協力がえられそうですので, 共同研究をしていければと思います.

本日はご清聴ありがとうございました. 皆さまもどうぞお元気で!