

有限の為の無限：頂点代数との出会い, $\infty/\infty = \text{有限}$

宮本雅彦 筑波大学（名誉教授）

まえがき 岡シンポジウムでは、数学の話とともに、数学人生も少し話してくださいとのことだったので、そのことは話の流れに従って書いていきたいと思う。現代数学の大きな潮流として、Edward Frenkel が NHK E テレの数学ミステリー白熱授業でも取り上げていたが、Langlands program などの数学統一化構想（数学の多くの分野の根底には、繋がりがあ

る）がある。私は、その大きなうねりを作り出す立場ではなく、モンスター群を求めているら、その大きなうねりに巻き込まれ、数学の孤島と呼ばれたこともある有限群研究から、頂点作用素代数という場所に流されてしまった人間である。そこでは、それまで交流がなかった数論、幾何、解析、数理物理が当然のように闊歩していた。今回は、その分野の説明というよりは、体験談だと思って聞いていただきたい。

1 有限群研究から頂点 (作用素) 代数 (略して $V(O)A$) へ

有限群の研究における大きな出来事は、John Thompson が Walter Feit との共著で書いた Odd order Paper と呼ばれる 1963 年の論文（奇数位数の群はすべて可解群）である。この結果により、1970 年に Fields Medal を受賞している。そして、そこから Daniel Gorenstein の下で多くの研究者が単純群分類研究を開始した。手法は群の抽象群としての情報だけから、全体を特定するもので、構造論と呼ばれる。良い例が、シローの定理であり、群の位数だけから、群の内部構造に対する情報が得られる。この構造論が単純群の分類に有効であるとされた理由は、Richard Brauer が単純群 G の位数 2 の元 g の中心化群 $C_G(g)$ (g と交換可能な元全体のなす部分群) の構造から、 G の構造が決まる例を多数紹介していたからである。未知の単純群 G があれば、Odd order paper により位数 2 の元 g があり、位数に関する帰納法を使うと、 $C_G(g)$ に出てくる単純群はすべて既知として良い。 G が単純群であることから、 $C_G(g)$ の構造も制限され、かなりの情報が得られる。この構造論は、有限単純群の発見に大きく貢献する。当時知られていた有限単純群は、素数位数の巡回群、5 次以上の交代群、有限次元の単純リー群を有限体上で構成したもの（自己同型で制限してできる鈴木系列や Tits 群も含める）などの無限系列と Emile Mathieu が 150 年程前に特別な 2 元符号の自己同型群として構成した Mathieu 群（5 個）だけだった。上記の無限系列に入らない有限単純群を散在型と呼ぶ。2004 年に散在型有限単純群は 26 個しかないことが最終的に証明され、有限単純群分類研究は完成した。散在型有限単純群の中で一番大きい群はモンスター単純群 M と呼ばれる。

群の構造論では、背理法（実際には位数に関する数学帰納法）を多用し、他分野と関係しない論法が多いうえ、結果も他分野へ直接的に波及しなかった。構造論分野以外では、群はある対象物の対称変換の集まり（自己同型群）と理解され、大学の授業でもそれで説明することが多い。それゆえ、対象物を考えない群論にどれだけの意味があるのかという疑問は自然でもある。しかし、一群論研究者の弁明になるが、上記の構造論を利用することで、Zvonimir Janko が J_1 と呼ばれる単純群を発見する。この群を自己同型群として持つような標準的対象物は J_1 の群構造を使って構成したもの以外にはない。それゆえ、構造論を経ずしては J_1 が見つからなかった可能性が高い。

2 (Monstrous) Moonshine 予想

2.1 John McKay の観測 (1976)

Bernd Fisher により、それまで知られていた散在型有限単純とは桁違いに大きい（19 桁だったのが 54 桁へ）モンスター単純群 $\mathbb{M}$ の存在が予想され、最小の非自明既約表現の次数が 196883 であることが報告された。J. McKay がそれを聞いて、楕円モジュラー ($SL(2, \mathbb{Z})$ -不変) 関数の生成元 $J(\tau) = c_0q^{-1} + c_2q + c_3q^2 + \cdots = q^{-1} + \mathbf{196884}q + 21493760q^2 + \cdots$ の係数 $c_2 = 196884$ と極似していることに気づき、John Thompson に相談した。J. Thompson は偶然だと一蹴せず、当時知られていた $\mathbb{M}$ の 3 つの既約表現の次数を小さい順 $\chi_1 = 1, \chi_2, \chi_3$ に並べて $J(\tau)$ の係数と比較してみた。すると、

$$\begin{array}{lll} c_0 = 1 & = \chi_1(1) & \chi_1(1) = 1 \\ c_2 = 196884 & = \chi_1(1) + \chi_2(1) & \chi_2(1) = 196883 \\ c_3 = 21493760 & = \chi_1(1) + \chi_2(1) + \chi_3(1) & \chi_3(1) = 21296876 \end{array}$$

と関係があることが分かり、当時モンスター単純群の研究をグループで行っていた John Conway に連絡した。（3 名とも名前が John です。）

2.2 Moonshine 予想

J. Conway はかれらのグループで調べていたモンスター単純群の他の既約表現（最初の 10 個）の次数だけでなく、群の元の値である指標値も使って計算した。すると、 $g \in \mathbb{M}$ に対しても

$$q^{-1} + \{\chi_1(g) + \chi_2(g)\}q + \{\chi_1(g) + \chi_2(g) + \chi_3(g)\}q^2 + \cdots +$$

が種数 0 の保型関数 (Haupt module) の低次項と一致していることを見つけた。J. Conway 達は、それ以外にも色々不思議な現象を集めていた。これらの結果を一般に知らしめるべきだと判断した出版社の依頼により、モンスター単純群にまつわる話を論文雑誌に投稿した。その中心となるのが、次の予想である。

予想 1 (Moonshine 予想 (1979) John Conway, Simon Norton) 何かモンスター単純群 M の自然な加群 $V = \bigoplus_{m=0}^{\infty} V_m$ で, $g \in M$ に対して, $\sum_{m=0}^{\infty} (\text{Tr}_{V_m} g) q^{m-1}$ が *Haupt module* となるものが存在する. ここで, *Haupt module* とは種数 0 の合同群に対する保形関数である.

2.3 Moonshine 加群 $V^\natural$

この予想に対して, 1983 年に Igor Frenkel, James Lepowsky, Arne Meurman が数理物理と Robert Griess のモンスター群構成, それに位数 2 の自己同型による軌道理論を利用して, Moonshine 加群 $V^\natural = \bigoplus_{m=0}^{\infty} V_m^\natural$ を構成し, Moonshine 予想の解ではないかと提起した.

2.4 頂点代数 (Vertex Algebra)

この発表を聞いた J. Conway の学生であった Richard Borcherds は場の理論の考え方から $V^\natural$ には無限個の 2 項演算を持つ代数構造 (R. Borcherds は頂点代数と名付けた) が入ると発言した. この代数の構成の詳細は [FLM の本 1988] に書かれている.

そして, 1992 年に R. Borcherds は実際に, モンスター単純群のすべての元に対して, $V^\natural$ が Moonshine 予想を満たすことを示し, これにより Moonshine 予想は解決した. この証明の為に, R. Borcherds は J 関数に関する美しい Borcherds 恒等式と一般 Kac-Moody 代数の概念を導入している. これらの結果により, 1998 年に Fields Medal を受賞している.

3 数理物理との出会い, 場の理論の概念

3.1 場の理論とは?

場の理論の標準的モデルである Wightman の公理について説明する. 各物理状態を 1 つの元 (基) と見て, 扱うすべての物理状態からなる集合 Ω が張る線形空間 $\tilde{M} = \text{Span}_{\mathbb{C}}\{\Omega\}$ を考える. 各 $v \in \Omega$ は時空の点 z ごとに Ω の置換を与えるので, v の影響は各点 z で線形変換 $Y(v, z): \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ を与えている. 即ち, 影響 $Y(v, z)$ は時空間上の線形変換 $\text{End}(\tilde{M})$ 値関数とみることができる.

我々が行う Ω の観測は, 実験により数値として出てくるので, これは $\tilde{M}$ の双対空間 $\tilde{M}' = \text{Hom}(\tilde{M}, \mathbb{C})$ の元と見ることができ, 両線形形式 $\langle \tilde{M}', \tilde{M} \rangle \in \mathbb{C}$ を考える. ただ, 我々は観測によってしか物理状態の区別がつかないので, 可能な観測で区別できないものを同一視し (この関係を $\sim$ で表す), $M = \tilde{M}/\sim$ を研究対象の状態の空間だとしてよい. それゆえ, $v \in M$ の影響を調べる場の理論は, 関数

$$\langle \mu, Y(v, z)\beta \rangle \quad \mu \in M' = \text{Hom}(M, \mathbb{C}), \beta \in M$$

を考えることとなる.

場の理論を研究する上で, 重要なことは 影響の合成である. 即ち,

$$\langle \mu, Y(v, z_1)Y(u, z_2)\beta \rangle \quad (\text{積}) \tag{3.1}$$

を計算することであり、少なくとも、これがある領域で定義されていると期待する。作用素環の標準的手法では、 $z \in \mathbb{C}$ とし、上記の積が関数として $|z_1| > |z_2| > 0$ で収束することを期待し、 $M = M'$ と $\langle \cdot, \cdot \rangle$ の組を Hilbert 空間と仮定して研究した。

場の理論では、上記以外に、物理的な条件として、次の3つを仮定する。

- (1) 他の方に影響を与えない場（真空） $\mathbf{1}$ が存在する。即ち、 $Y(\mathbf{1}, z) = 1_M$ （恒等変換）。
- (2) すべての場は真空から生成できる。即ち、 $\lim_{z \rightarrow 0} Y(v, z)\mathbf{1} = v$ を満たす。
- (3) 因果律: (影響の速度は光速を超えない。即ち、光速以上に離れた時空の2点の影響の積は作用の順番とは無関係に決まる。(即ち、(3.1)の積が可換である)。

2次元の場においては、(3)の因果律は分かりやすい形に変形できる。即ち、光の伝搬を表す光錐を使って、場の理論を左カイラル、右カイラルに分解すると、片方のカイラルにおいては、光速以上に離れた関係を複素数 z_1, z_2 による $|z_1| > |z_2|$ と $|z_2| > |z_1|$ の関係に書き換えることができる。これにより、上記の因果律における可換性は、 $|z_1| > |z_2|$ で求めた $\langle \mu, Y(v, z_1)Y(u, z_2)\beta \rangle$ を複素全平面に解析接続したものと、 $|z_2| > |z_1|$ で求めた $\langle \mu, Y(u, z_2)Y(v, z_1)\beta \rangle$ を複素全平面に解析接続したものが一致するという条件に置き換わる。(説明は V. Kac[9] の本を参照)

3.2 Richerd Borchers の考察

物理状態のエネルギーレベルを次数だと考えると、次数は最小単位 $\hbar$ （プランク定数）の自然数倍であり、エネルギーレベル0は真空だけである。これは、Moonshine 加群の形と似ており、扱う物理状態全体の空間を $M = M_0 \oplus M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus \cdots$ とし、 $M_0 = \mathbb{C}\mathbf{1}$ と見ることができる。観測もエネルギーレベルを考えると、膨大な双対空間 $\text{Hom}(M, \mathbb{C})$ を考える必要がなく、制限双対空間 $M' = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \text{Hom}(M_n, \mathbb{C})$ で十分となる。特に、Moonshine 予想のように、 $\dim M_n < \infty$ なら、 M' も可算次元である。さらに、時空 z もエネルギーレベルに対応させて考慮することで、作用素 $Y(v, z)$ は次数に合わせた冪級数表示 $Y(v, z) = \prod_{n \in \mathbb{Z}} v_n z^{-n-1} (v_n \in \text{End}(V))$ と表示できる。ここで、 $v_n(M_m) \subseteq M_{m+\text{wt}(v)-n-1}$ である。以後の為に、 v の作用素で次数を k だけ上げる成分を $o_k(v) = v_{\text{wt}(v)-1-k}$ と表示する。加法表示の方が通常なので、 T に係数を持つような z の形式的冪級数全体 $\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} t_m z^m \mid t_m \in T\}$ を $T[[z, z^{-1}]]$ で表し、これ以降、 $Y(v, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n z^{-n-1} \in \text{End}(M)[[z, z^{-1}]]$ と書く。

Moonshine 加群は Hilbert 空間ではないので、作用素 $Y(v, z)$ の方に条件が必要である。

定義 2 (量子作用素と truncation property) ベクトル空間 M に対して、 $\phi_n \in \text{End}(M)$ を係数に持つ形式的冪級数 $\phi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi_n z^{-n-1}$ が M 上の量子作用素であるとは、各 $u \in M$ に対して、 $N_u \in \mathbb{N}$ が存在して、 $\forall n \geq N_u$ に対して、 $\phi_n u = 0$ となるものをいう。このように下に有界である性質、即ち、 $\phi(z)u \in V[[z^{-1}]][[z]]$ となる性質を **truncation property** と呼ぶ。

定義 3 (局所可換 (因果律)) ベクトル空間 M 上の2つの量子作用素 $\phi(z), \psi(z)$ が局所可換であるとは、 $N_{v,u} \in \mathbb{N}$ があって、 $(z_1 - z_2)^{3N} [\phi(z_1), \psi(z_2)] = 0$ となることである。

局所可換の説明 $\frac{1}{1-z}$ を $|z| < 1$ で展開すると、 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ であり、 $|z| > 1$ で展開すると $-\sum_{n=-1}^{\infty} z^n$ となる。それらの差 $\delta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n$ は $(z_1 - z_2)\delta(z_1/z_2) = 0$ を満たす。同様に、 $\frac{1}{1-z}$ を有限回微分したものも同じような性質を持つ。このような差を 0 の展開と呼んでいる。この微分した回数 m は丁度消去する多項式 $(z_1 - z_2)^m$ の次数になっているので、多項式レベルの可換性とも言える。

定義 4 (n -積) ベクトル空間 M 上の量子作用素 $\phi(z), \psi(z)$ と $n \in \mathbb{Z}$ に対して、 $\phi(z)$ と $\psi(z)$ の n -積 $(\phi_n \psi)(z)$ を

$$(\phi_n \psi)(z) = \text{Res}_x \{ (x - z)^n \phi(x) \psi(z) - (-z + x)^n \psi(z) \phi(x) \}$$

で定義する。ここで、 $(a + b)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$, $\binom{n}{j} = n(n-1) \cdots (n-j+1)/j!$ である。

2次元の場の理論の代数版である頂点代数を構成する上で非常に便利な結果がある。

定理 5 (Chongying Dong と Haishen Li の補題) 量子作用素 $\phi(z), \psi(z)$ が互いに（お互いの自己も含む）局所可換なら、 $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して、その n -積 $(\phi_n \psi)(z)$ も、量子作用素であり、 $\phi(z), \psi(z)$ の両方と局所可換なもの達と局所可換となる。微分 $\frac{d}{dz} \phi(z)$ も同様に量子作用素であり、 ϕ と局所可換なもの達と局所可換である。

これにより、互い(含自己)に局所可換な量子作用素の集合があれば、それらから n -積と微分を繰り返して生成される量子作用素全体 $\mathcal{V}$ は上記の無限個の 2 項演算 (n -積) と微分で閉じている代数となる。これが頂点代数である。

R.Borcherds は成分表示を中心においた。これにより、局所可換と n -積は成分表示を使って

$$[v_n, u_m] = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} (v_j u)_{n+m-j} \quad (v_n u)_m = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} (-1)^j \{ v_{n-j} u_{m+j} - (-1)^n u_{n+m-j} v_j \}$$

と表示できる。 n -積の形のものを一般に結合律と呼ぶ。これにより、これまでの解析手法だけではなく、場の理論を純代数的にも扱えるようになった。

3.3 頂点代数を公理として書くと（成分表示）

場の理論の説明では、 z は時空の点であるが、ここでは、 $1+1$ 次元の場の理論に対応しているので、 $z \in \mathbb{C}$ として記述する。

定義 6 (頂点代数) 線形空間 $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$ と線形写像 $Y : V \rightarrow \text{End}(V)[[z, z^{-1}]]$ の組で、 $Y(v, z)$ は互いに局所可換な V 上の量子作用素であり、

(1) $Y(v_n u, z)$ は $Y(v, z)$ と $Y(u, z)$ の n -積、

即ち、 $(v_n u)_m = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} (-1)^j \{ v_{n-j} u_{m+j} - (-1)^n u_{m+n-j} v_j \}$

(2) $Y(\mathbf{1}, z) = 1_V$ かつ、 $\forall v \in V$, $\lim_{z \rightarrow 0} Y(v, z) \mathbf{1} = v$ となる真空 $\mathbf{1} \in V_0$ を含み、

(3) 微分で閉じている。即ち、 $\exists T : V \rightarrow V$ で、 $\forall v \in V$, $Y(Tv, z) = \frac{d}{dz} Y(v, z)$ 。

$Y(v, z)$ を $v \in V$ の頂点作用素と呼ぶ. (2) より, $Y(v, z) = 0$ となるのは $v = 0$ のみであり, 場 v と作用素 $Y(v, z)$ は 1 対 1 対応している. また, $Y(Tv, z) = 0$ なら $T(v, z) \in \mathbb{C}$ となるので, $v \notin \mathbb{C}1$ なら $Tv \neq 0$ である. 次に, 作用が共形変換に対して不変な場の理論 (共形場理論) を考える.

定義 7 (共形頂点代数) 頂点代数 V がさらに, 次を満たす共形元 $\omega \in V_2$ を持つ.

($L(n) = \omega_{n+1}$ と置く)

(4) $[L(m), L(n)] = (m - n)L(m + n) + \delta_{m+n,0} \frac{m^3 - m}{12} c$ ($c \in \mathbb{C}$) **Virasoro 関係式**,

ここで $\delta_{m,n}$ はクロネッカーデルタであり, c は V の中心電荷と呼ばれる.

(5) $Y(L(-1)v, z) = \frac{d}{dz} Y(v, z)$, 即ち, $T = L(-1)$ は微分

(6) 各次数空間 V_m 上で, $L(0)|_{V_m} = m1_{V_m}$, 即ち, $L(0)$ は次数作用素

上の共形元 ω の頂点作用素 $Y(\omega, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L(n)z^{-n-2}$ は場の理論においてエネルギー・運動量テンソルに対応している. 論文や本 [5] によっては ω を Virasoro 元と呼んでいる.

補題 8 (skew-symmetry) $(V, Y, 1, \omega)$ を共形頂点代数とする. この時, 次が成り立つ.

$$\forall v, u \in V, n \in \mathbb{Z}, \quad v_n u = (-1)^{n+1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-L(0))^j}{j!} u_{n+j} v$$

さらに有限性を加えて,

定義 9 (頂点作用素代数) $\mathbb{Z}$ -次数の共形頂点代数 $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$ で $\dim V_n < \infty$ となるものを頂点作用素代数 (**Vertex Operator Algebra**), 略して **VOA** と呼ぶ. 特に, $\dim V_0 = 1$ となるものを *CFT-type* (共形場理論型) と呼ばれる. (*VOA* では, $n \ll 0$ なら $V_n = 0$ であり, *CFT-type* なら $n < 0$ なら $V_n = 0$ である.)

頂点代数 V において, 0-積は, $[v_0, u_0] = (v_0 u)_0$ を満たすので, リー積に近い. また, v_n を $v \otimes t^n \in V \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ と表記すると, $[v \otimes t^n, u \otimes t^m] = \sum_{j=0}^{\infty} (v_j u) \otimes t^{n+m-j}$ を満たし, $\tilde{V} = V \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ はリー代数の構造を持つ. それゆえ, リー代数は頂点代数研究の基本である.

定義 10 (加群) V を頂点代数とし, M をベクトル空間とする. 各 $v \in V$ に対して, 線形に M 上の量子作用素 $Y^M(v, z) \in \text{End}(M)[[z, z^{-1}]]$ が定義され, V の n -積が $Y^M(v, z)$ 達の n -積となり, 頂点代数の条件 (Y を Y^M に置き換え, $Y^M(\omega, z) = \sum L^M(n)z^{-n-2}$ に置き換えたもの) を満たすとき, M を V の加群と呼ぶ. 特に, $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M_{(n)}$ が V -加群で, $v \in V_m$ と $r \in \mathbb{Z}$ に対して, $v_r M_{(n)} \subseteq M_{(n+m-r-1)}$ を満たすとき, $\mathbb{N}$ -次数付き加群と呼ぶ.

VOA の研究では, 上の $\mathbb{N}$ -次数付き加群だけを加群と呼び, それ以外を弱加群と呼んでいる. 代数から来た私はびっくりしたが, 歴史的に研究の出発点が物理の良いモデルだったこともあり, エネルギーレベルを表す $L^M(0)$ による固有値分解を当然のことと仮定し, しかも下に有界な固有値しか持たないものだけを扱っていたからである. 最近になって, このような弱加群を持つ頂点作用素代数の研究が広まり, 私のように弱加群という名称に疑問を持つ方が増えている.

4 モジュラー不変性はどこからくるか？

VOA が数理論物理の研究者に 2 次元共形場理論の代数版であると認識された一番の理由は、共形場理論で重要な働きをするモジュラー不変性（多くの場合は仮定や公理に加えて考えていた）が、VOA の標準的な仮定だけから導かれることが分かったからである（Yongchang Zhu の結果）。それゆえ、Moonshine 予想を生み出したトレース関数とモジュラー形式の関係が、モンスター単純群に依存したものではなく、頂点作用素代数の条件（既約加群が唯一つ）から出てくることが解明された。この結果の証明の概略を紹介しよう。この Y. Zhu の論文は、VOA の抽象的な感覚がつかめ、入門書として一番好きなものである。

交換関係式 $[a(n), b(m)] = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} (a(i)b)(n+m-i)$ と Tr の可換性により、

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{W o_{-k}(a) o_k(b) q^{L(0)}} &= \text{Tr}_W [o_{-k}(a), o_k(b)] q^{L(0)} + \text{Tr}_W o_k(b) o_{-k}(a) q^{L(0)} \\ &= \text{Tr}_W [o_{-k}(a), o_k(b)] q^{L(0)} + \text{Tr}_W o_k(b) q^{L(0)} o_{-k}(a) q^k \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \binom{\text{wt}(a)-1+k}{j} \text{Tr}_W o(a_j b) q^{L(0)} + \text{Tr}_W o_{-k}(a) o_k(b) q^{L(0)} q^k \end{aligned}$$

を得る。それゆえ、 $k \neq 0$ の場合には、

$$\begin{aligned} \text{Tr}_W o_{-k}(a) o_k(b) q^{L(0)} &= \frac{1}{1-q^k} \sum_{j \in \mathbb{N}} \binom{\text{wt}(a)-1+k}{j} \text{Tr}_W o_0(a_j b) q^{L(0)} \text{ となる。} \\ \text{一方、結合律 } o_0(a_{-1}b) &= (a_{-1}b)_{\text{wt}(a)+\text{wt}(b)-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \{a_{-1-j} b_{\text{wt}(a)+\text{wt}(b)-1+j} + b_{\text{wt}(a)+\text{wt}(b)-2-j} a_j\} \text{ から} \\ \text{Tr}_W o(a_{-1}b) q^{L(0)} &= \sum_{j=0}^{\infty} \text{Tr}_W \{o_{\text{wt}(a)+j}(a) o_{-\text{wt}(a)-j}(b) + o_{\text{wt}(a)-1-j}(b) o_{-\text{wt}(a)+1+j}(a)\} q^{L(0)} \text{ を得る。} \end{aligned}$$

定義 11 (幾何変形) $\mathbb{N}$ -次数付き頂点代数 $(V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n, Y(\cdot, z), \mathbf{1})$ に対して、新しい頂点作用素を $Y[v, z] = Y(v, e^z - 1) e^{\text{wt}(v)z}$ として定義すると、 $(V, Y[\cdot, z], \mathbf{1})$ は新しい頂点代数となる。これを幾何変形と呼ぶ。（共形元は少し変化する。）

驚くことに、この幾何変形を使って上記の式を変形すると、Eisenstein 級数の展開 $E_{2k}(\tau) = \frac{2\xi(2k)}{(2\pi i)^{2k}} + \frac{2}{(2k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2k-1} q^n}{1-q^n}$ がでてくるのである。それにより、次の美しい結果を得る。

補題 12 (Zhu) $\text{Tr}_W o_0(a) o_0(b) q^{L(0)} = \text{Tr}_W o_0(a[-1]b) q^{L(0)} - \sum_{k=1}^{\infty} E_{2k}(\tau) \text{Tr}_W o_0(a[2k-1]b) q^{L(0)}$.

$Z_W(a, \tau) = \text{Tr}_W o_0(a) q^{L(0)-c/24}$ と置くと (c は V の中心電荷)、次の結果も出てくる。これで、これまでモジュラー形式を得るために技巧的に変形していた $q^{-c/24}$ の意味が明らかになった。

定理 13 (Zhu)

- a) $Z_W(v[0]a, \tau) = 0,$
- b) $Z_W(a[-2]b, \tau) = -\sum_{k=2}^{\infty} (2k-1) E_{2k}(\tau) Z_W(a[2k-2]b, \tau),$
- c) $\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\tau} Z_W(b, \tau) = Z_W(L[-2]b, \tau) - \text{wt}(b) E_2(\tau) Z_W(b, \tau) - \sum_{\ell=2}^{\infty} E_{2\ell}(\tau) Z_W(L[2\ell-2]b, \tau).$

4.1 制限双対加群

場の理論で大切なことは観測（双対加群の概念）である．それを頂点代数の立場で説明する．

定義 14 (制限双対加群) V の $\mathbb{Z}$ -次数付き加群 $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ に対して, $M' = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \text{Hom}(M_n, \mathbb{C})$ を考え, 2次形式 $\{\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{C} \mid \alpha \in M', \beta \in M\}$ を考える．この時, $v \in V$ の M' 上の作用素 $Y^{M'}(v, z) \in \text{End}(M')[[z, z^{-1}]]$ を $\alpha \in M', \beta \in M$ に対して

$$\langle Y^{M'}(v, z)\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, Y^M(e^{zL(1)}(-z^{-2})^{L(0)}v, z^{-1})\beta \rangle$$

で定義すると, M' も $\mathbb{Z}$ -次数付き V -加群となる．これを制限双対加群と呼ぶ． $V \cong V'$ の時, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を不変内積と呼ぶ．

4.2 共形頂点代数の例

リー代数で, 次数 n に関して多項式レベルの可換性を持つものがあれば, そこから量子作用素ができ, 頂点代数が構成できる．その例を紹介する．

(1) **ハイゼンベルグ VOA** $M(1)^{\otimes k}$ $(L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を k 次元の内積空間とする． $H = L[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}$ の中にリー積を $[v(m), u(n)] = \delta_{m+n, 0} m \langle v, u \rangle \in \mathbb{C}$ で定義すると, H はハイゼンベルグ代数と呼ばれるリー代数となる．ここで, vt^m を $v(m)$ と表記した．この時, $Y(v, z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} v(m) z^{-m-1}$ は1次多項式レベルの可換であり, これらによって真空 $\mathbf{1}$ (即ち, $m \geq 0$ なら $v(m)\mathbf{1} = 0$) から生成される頂点代数はハイゼンベルグ VOA と呼ばれる．ヴィラソロ元は L の正規直交基底 $\{\alpha_j : j = 1, \dots, k\}$ を使って, 菅原構成法 $\omega = \frac{\sum_{j=1}^k \alpha_j(-1)\alpha_j(-1)\mathbf{1}}{2}$ で与えられる．

(2) **アフィンリー VOA** $V_{\mathcal{H}}$: リー代数 $\mathcal{H}$ と $v(n) = vt^n, u(m) = ut^m \in \mathcal{H}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}$ に対して, $[v(n), u(m)] = [v, u](n+m) + \delta_{n+m, 0} n \langle v, u \rangle$ で定義されるアフィンリー代数に対して, $Y(v, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v(n) z^{-n-1}$ は1次多項式レベルの可換性を持ち, これらによって真空から生成される VOA は WZW 模型と呼ばれる．

(3) **ヴィラソロ VOA**: ヴィラソロ関係式 $[L(n), L(m)] = (n-m)L(n+m) + \delta_{n+m, 0} \frac{n^3-n}{12} c$ を満たすリー代数を中心電荷 $c \in \mathbb{C}$ のヴィラソロ代数と呼ぶ．これは回転運動を表すループ代数の中心拡大であり, 中心電荷 (質量に対応) を決めると中心拡大は一意的にきまるので, 物理において重要な役割を果たす． $Y(\omega, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L(n) z^{-n-2}$ は3次多項式レベルの可換性をもっており, それらにより, 真空から生成される VOA はヴィラソロ VOA と呼ばれる．

上記の VOA の表現は truncation property と中心電荷を無視すると、リー代数の研究と同じである。前に述べたように、 $\tilde{V} := V[t, t^{-1}]$ はリー代数となり、 V -加群は $V[t, t^{-1}]$ -加群である。ただし、VOA の表現において、truncation の性質と中心電荷は重要である。例えば、 U, W を V -加群 ($\tilde{V}$ -加群) とすると、 $U \otimes W$ も $[h, (u \otimes w)] = [h, u] \otimes w + u \otimes [h, w]$ により $\tilde{V}$ -加群となる。しかし、このテンソル積への作用の定義では、truncation property を保つとは言えないし、中心電荷が2倍になってしまう。これを解消するために、頂点代数では、ベクトル空間のテンソルではなく、Hom に対応する交絡作用素を導入して、加群のテンソル積に対応するフュージョン積を考える。

- (4) 格子頂点代数 V_L ランク k の偶格子 L に対して、
 (a) L の内積空間 CL によるハイゼンベルグ VOA $M(1)^{\otimes k}$ と
 (b) L を加法群と見て、その群環 $e^L = \bigoplus_{\alpha \in L} \mathbb{C}e^\alpha$ を考え、
 この2つを合体させた $V_L = M(1)^{\otimes k} \otimes e^L$ の中に頂点代数の構造が入る。

群環の正確な定義には、条件 $e^\alpha e^\beta = (-1)^{\langle \alpha, \beta \rangle} e^\beta e^\alpha$ が入る。 $M(1)^{\otimes k}$ の元 $\alpha(-1)\mathbf{1}$ の頂点作用素 $\alpha(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha(m)z^{-m-1}$ は、 $M(1)^{\otimes k}$ 部分にはハイゼンベルグ VOA の頂点作用素として働き、群環部分には $n > 0$ なら $\alpha(n)e^\beta = 0$, $\alpha(0)e^\beta = \langle \alpha, \beta \rangle e^\beta$, $n < 0$ なら $\alpha(n)e^\beta = \alpha(n)\mathbf{1} \otimes e^\beta$ として作用する。一方、群環部分の元 e^α ($\alpha \in L$) の頂点作用素は、
 $Y(e^\alpha, z)M(1)^{\otimes k}e^\beta = \exp\{\sum_{n=1}^{\infty} -\alpha(-n)/n\} \exp\{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n)/n\} M(1)^{\otimes k}e^\alpha e^\beta z^{\langle \alpha, \beta \rangle}$
 で定義する。 L が正定値だと、 V_L は VOA である。

VOA の公理を最初に見た時、上のすべての公理 (skew-symmetry も含む) が成分表示だけで書かれており、人工的すぎて、研究対象ではないと思った。しかし、しばらく付き合っていくと、これは現代アートのようなもの、特に、現代絵画の一つである Cubism のようなものだと感じる。例えば、Cubism の創始者の一人であるピカソの「椅子に座る女」の一つは、椅子に座る女性を、前から見た図と横から見た図を同一の絵に組み込んで表現している。この絵は、ボーと眺めるだけでは、女性の美しさは分からない。しかし、観察者が自ら色々考えることで、表面的な美しさとは異なる美しさを見出すことができる。これと同じことが VOA でも起こっている。格子頂点代数は、格子の持つ2面を一つに合わせたものである。複雑化しただけに見えるが、表面からでは見えない次の美しい構造が含まれている。

- (1) 1次元格子でさえ分解する可能性がある。例えば、格子 $L = \mathbb{Z}x$ ($\|x\| = 4$) の VOA V_L は2個の中心電荷 $1/2$ の VOA のテンソル積を含む。また、
 (2) 内積空間と加法群を混ぜるような自己同型が内部から出てくる。即ち、リー代数の内部自己同型と同じように、ある種の元だけで自己同型が定義できる。

容易に, 2つの頂点代数 $(V, Y, \mathbf{1}, \omega), (U, Y', \mathbf{1}', \omega')$ に対して, そのテンソル積 $V \otimes U$ も $Y''(v \otimes w, z) = Y(v, z) \otimes Y'(w, z)$ により, 真空 $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}'$ とヴィラソロ元 $\omega \otimes \mathbf{1}' + \mathbf{1} \otimes \omega'$ を持つ共形頂点代数となる. このとき, V -加群 M と U -加群 N に対して, $M \otimes N$ は $V \otimes U$ -加群である.

コーヒーブレイク 私の数学人生 (人間万事塞翁が馬)

北海道大学時代: 学生院生 (71-79) 助手 (79-81) 都筑俊郎門下 (有限群の研究)

愛媛大学講師時代 (81-83) 有限群の研究

× 1983 年 D. Gorenstein が単純群分類の完成を発表 (証明が不完全)

助教授時代 (83-96) 他の研究テーマを求めて, 組合せ論, 群の整数表現を研究
一年発起して,

在外研究員 (86-87) Univ. of Illinois へ Irving Reiner 氏 (整数表現) に学ぶ為渡米

× 渡米して 10 日後 I. Reiner の葬儀に参列. 整数表現関係者は離散

茫然自失の状態で帰国. 見かねた木村浩先生, 原田耕一郎先生のおかげで,

客員講師 (90-91) Ohio State Univ. へ 原田耕一郎氏の下で VOA の勉強開始

「成績の悪い学生からの学生評価は悪いのが当たり前だから, 成績の良い

学生から, 悪い学生評価をもらわないように」という学科長の言葉に納得.

筑波大学教授時代 (96-2018) 有限群と頂点作用素代数の研究,

Fermion を使った MoonshineVOA の新構成法を発表し, 代数学賞 (1999)

Academia Sinica 特任教授 (18-21) Lam Ching-Hung 氏と共同研究

5 微分方程式を生み出す有限条件

基本的な感覚は, 頂点作用素代数には微分 $\frac{d}{dz}Y(v, z) = Y(L(-1)v, z)$ があり, これは次数を 1 つ上げる, 即ち, $\text{wt}(L(-1)v) = \text{wt}(v) + 1$ である. それゆえ, ある種の有限性を加えると微分方程式が生まれる. ここでは, 次のような有限性条件を考える.

定義 15 $C_m(M) = \text{Span}_{\mathbb{C}}\{v_{[-m]}u \mid v \in V, u \in M, \text{wt}(v) > 0\}$ と定義し, $\dim M/C_m(M) < \infty$ のとき, C_m -余有限と呼ぶ. $v_{-m}u$ で定義しても同じ結果.

5.1 トレース関数のモジュラー不変性:

定理 16 (M2) V が C_2 -余有限で M が V -加群なら, $Z_M(v, \tau)$ はモジュラー不変な微分方程式を満たし, 解は既約加群上の (擬) トレース関数の線形和となる. 特に, $Z_M(v, \tau)$ の $\text{wt}(v)$ のモジュラー $(\text{SL}(2, \mathbb{Z}))$ 変換は既約加群 $\{W^j : j \in I\}$ 上の擬トレース関数 $Z_{W^j}(w, \tau)$ 達の線形和となる.

証明の概略を説明する． $\dim V/C_2(V) < \infty$ より，ある ℓ があって， $V = C_2(V) + \sum_{j=0}^{\ell} V_{[j]}$ となる． $\{u^1, \dots, u^n\}$ を $\sum_{j=0}^{\ell} V_{[j]}$ の基底とする．Zhu の結果から， $\partial Z(u^i, \tau) = Z(L[-2]u^i, \tau) - \sum_{\ell=2}^{\infty} E_{2\ell}(\tau) Z(L[2\ell-2]u^i, \tau)$ である．ベクトル $\vec{Z} = (Z(u^i, \tau))_{i=1, \dots, n}$ を考える． $L[-2]u^i$ や $L[2j-2]u^i$ 達は法 $C_2(V)$ で u^j 達の線形和であり， $C_2(V)$ の元のトレイス関数は Zhu の結果により，アイゼンシュタイン級数を係数とするウェイト ℓ 以下の元達のトレイス関数の線形和と書けるので，アイゼンシュタイン級数の線形和を成分とする $n \times n$ 行列 A があって， $\partial \vec{Z} = A \vec{Z}$ (行列型微分方程式) が得られ，通常関数の高次微分方程式も得られる．]

特に，注目すべき結果として， N -次数付き加群 $M = \oplus_{m=0}^{\infty} M_m$ のトップ加群 M_0 が成分表示だけで決定できること [Y. Zhu] である．これらは R. Borcherds が成分表示を中心とする定義を与えたことから出てきた結果である．

5.2 ウェイト 1 の元と弱 Jacobi 形式

さらに， V を CFT 型 ($\dim V_0 = 1$) とすると， $(V_1, 0 \text{ 積})$ はリー代数となる． $v, u \in V_1$ の内積 (v, u) は $(v, u)\mathbf{1} = v_2 u$ で定義する．このとき， $\text{Tr}_V \exp\{o(v)\} q^{L(0)-c/24} = \sum \frac{o(v)^n}{n!} q^{L(0)-c/24}$ のモジュラー変換式が計算可能であり，次の結果が得られる．

定理 17 V を CFT 型の VOA とし， V_1 のカルタン部分代数 $\mathcal{H}$ の元 u, v に対して $Z_W(v, u; \tau) = \text{Tr}_W \exp\{2\pi i(o(v) - \langle v, u \rangle/2)\} q^{L(0)+o(u)-(c+12\langle u, u \rangle)/24}$ と置くと， $Z_W(v, u; \tau)$ はある種のモジュラー不変性を満たし，特に， $Z_{W_h}(zv, v; \tau)$ は弱 Jacobi 形式 (行列型) となる．

5.3 ベクトル値モジュラー形式の空間 $\mathcal{F}$ 上の微分方程式 (Jaffrey Mason)

VOA の存在を考えることなしに，トレイス関数の箇所で出てきた形のモジュラー不変の高次微分方程式 $(D_k^p + \sum_{j=1}^p P_{2j} D_k^{p-j})f = 0$ を考える．ここで，微分作用素 $D_k : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, $f \mapsto \theta f + k E_2(\tau) f$, $\theta = q \frac{d}{dq} = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\tau}$ とし， P_m は $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ の自明な表現の weight m の正則 vector 値モジュラー形式．このような微分方程式を与え，どの微分方程式の，どの解が実際に VOA 加群として実在するかを調べる研究がある．

5.4 加群のフュージョン積

通常代数における加群のテンソル積 $\otimes$ の概念に対応するフュージョン積 $\boxtimes$ を説明する．以下， $v \in V$ とし， A, B, U, X, W は V -加群とする．ベクトル空間 T に対して， $T\{z\}$ で T に係数を持つ z 形式的複素冪級数全体 $\{\sum_{r \in \mathbb{C}} t_r z^r \mid t_r \in T\}$ を表す．

まず，通常 $\text{Hom}(A \otimes W, U)$ に対応する概念 $\mathcal{Y} \in \text{Hom}(A \otimes W, U\{z\}[\log z])$ を与える．

定義 18 (交絡作用素) $\alpha \in A$ に対して、線形に定義された

$$\mathcal{Y}(\alpha, z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{r_k \in \mathbb{C}} \alpha_{k, r_k} z^{r_k - 1} \log^k(z) \in \text{Hom}(W, U)\{z\}[\log z] \text{ で,}$$

(1) *truncation property*, (2) 局所可換と結合律, (3) 微分

の 3 条件を満たすものを $(\begin{smallmatrix} U \\ AW \end{smallmatrix})$ 型の交絡作用素と呼び、その全体を $I(\begin{smallmatrix} U \\ AW \end{smallmatrix})$ で表す。

古典的には、 $\mathbb{N}$ -次数付き加群だけを加群と呼んだように、扱い易い $\log(z)$ の無いものだけを交絡作用素と呼んだ。実際には、交絡作用素は (1),(2),(3) を満たせば良いので、 $\sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{r_k \in \mathbb{C}} \alpha_{k, r_k} z^{r_k - 1} \log^k(z)$ の形すら持つ必然もない。しかし、交絡作用素をうまく扱うには、現在のところ、確定特異点型の微分方程式に持ち込むしかなく、その場合に解は上記の形になる。それゆえ、全く新しい研究方法が見つかるまで、これで十分だと考えている。交絡作用素の定義で, *truncation property*, 局所可換, 微分と簡単に述べたが、少し正確に述べて置こう。

(1) **Truncation property** α に対して, $\exists K \text{ s.t. } k > K \text{ なら } \alpha_{k, r_k} = 0$. また, $w \in W, \alpha \in A$ に対して, $\exists R_{\alpha, w} \text{ s.t. } \Re(r_k) > R_{\alpha, w} \text{ なら, } \alpha_{k, r_k} w = 0$.

(2) 局所可換と結合律を成分表示で書くと、加群の時と似た形の次を得る。

$$(2.1) \quad v_n^U \mathcal{Y}(\alpha, z) - \mathcal{Y}(\alpha, z) v_n^W = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} \mathcal{Y}(v_j^A \alpha, z) z^{\text{wt}(v) - j}$$

$$(2.2) \quad (v_n^A \alpha)_{r_k, k} w = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} (-1)^j \{ v_{n-j}^U \alpha_{k, r_k + j} w - (-1)^n \alpha_{k, n + r_k - j} v_j^W w \}.$$

(3) 微分は $\mathcal{Y}(L(-1)a, z) = \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{Y}(a, z)$ を満たすこと。

当然、写像 $\phi : U \rightarrow X$ があれば、 $\mathcal{Y} \in I(\begin{smallmatrix} U \\ AW \end{smallmatrix})$ に対して、 $\phi \mathcal{Y} \in I(\begin{smallmatrix} X \\ AW \end{smallmatrix})$ である。また、 $\text{Span}_{\mathbb{C}}\{\alpha_{k, r_k} w \mid w \in W, \alpha \in A\} = U$ となるとき、 $\mathcal{Y}$ を全射と呼ぶ。

定義 19 (フュージョン積) ある全射交絡作用素 $\mathcal{Y} \in I(\begin{smallmatrix} U \\ AW \end{smallmatrix})$ が存在し、任意の $\mathcal{J} \in I(\begin{smallmatrix} T \\ AW \end{smallmatrix})$ に対して、 $\phi : U \rightarrow T$ があって、 $\mathcal{J} = \phi \mathcal{Y}$ となるものがあるとき、 U を A と W のフュージョン積と呼び、 $A \boxtimes W$ で表す。この場合、すべてのフュージョン積は同型となる。

ベクトル空間のテンソル積とは異なり、一般にフュージョン積が存在するとは限らない。しかし、 A, W の両方が C_1 -余有限なら、 $A \boxtimes W$ も C_1 -余有限加群である。

$\alpha \in A, \beta \in B, w \in W, \theta \in U'$ に対して、まず、 $\mathcal{Y}^1 \in I(\begin{smallmatrix} A \boxtimes B \\ AW \end{smallmatrix}), \mathcal{Y}^2 \in I(\begin{smallmatrix} U \\ A \boxtimes B W \end{smallmatrix})$ をつかって

$$F^1(\theta, \alpha, \beta, w; x, y) = \langle \theta, \mathcal{Y}^2(\mathcal{Y}(\alpha, x)\beta, y)w \rangle \text{ を考える。同様に,}$$

$$\mathcal{Y}^3 \in I(\begin{smallmatrix} X \\ A \boxtimes B \boxtimes W \end{smallmatrix}), \mathcal{Y}^4 \in I(\begin{smallmatrix} B \boxtimes W \\ BW \end{smallmatrix}) \text{ に対して, } F^2(\theta, \alpha, \beta, w : x, y) = \langle \theta, \mathcal{Y}^3(\alpha, x)\mathcal{Y}^4(\beta, y)w \rangle \text{ を考える。}$$

定理 20 A, B, W が C_1 -余有限なら、剰余の基底を使った関数ベクトル

$$(F^i(\theta^a, v^b, u^k, w^h; x, y))_{a, b, k, h} (i = 1, 2) \text{ はベクトル値線形微分方程式を満たす。}$$

それゆえ、 $A \boxtimes (B \boxtimes W) \cong (A \boxtimes B) \boxtimes W$ が成り立つ。

証明の概略も書いておこう． A, B, W, U を $\mathbb{N}$ -次数付き V -加群とし， A, B, W を C_1 -余有限とする．モジュラー不変に関する微分方程式の証明でも行ったように，加群 X に対して， V の次数を上げない作用では不変な有限次元部分空間 $J(X)$ で， $X = C_1(X) + J(X)$ となるものをとり， $J(X)$ の基底 $\Omega(X)$ を決めておく．交絡作用素の合成の z -微分 $\frac{z}{dz}\{\langle \theta', \mathcal{Y}^1(\beta, z_2)\mathcal{Y}(\alpha, z)w \rangle\} = \langle \theta', \mathcal{Y}^1(\beta, z_2)\mathcal{Y}(L(-1)^A\alpha, z)w \rangle$ に， $v_n^U \mathcal{Y}(\alpha, z) - \mathcal{Y}(\alpha, z)v_n^W = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} \mathcal{Y}(v_j^A \alpha, z) z^{\text{wt}(v)-j}$ を使って，次数を下げるものは右へ，次数を上げる操作は左へ移動させると， U, U' に対しては次数を上げず， A, B においては， $\mathcal{Y}(v_{-1}a, z) = (\sum_{j=1}^{\infty} v_{-j} z^{j-1}) \mathcal{Y}(a, z) + \mathcal{Y}(a, z)(\sum_{j=0}^{\infty} v_j z^{-j-1})$ を利用すると，総次数 $\text{wt}(\alpha) + \text{wt}(\beta) + \text{wt}(\theta) - \text{wt}(\theta')$ は常に減少する．それゆえ， A, B においても， $\Omega(A), \Omega(B)$ の元に収まり，多項式 $\times z^{-1}$ を係数とするベクトル型微分方程式ができる．

6 幾何とのつながり，超頂点作用素代数 SVOA

6.1 超頂点代数

超頂点代数とは 頂点代数 V^0 (even parity) と半整数 weight の V^0 -加群 V^1 (odd parity) の直和 $V^0 \oplus V^1$ であり，odd parity 同士の演算は歪可換 $AB + BA$ で考えて，局所（歪）可換性を満たすものである．

例 フェルミ粒子の作用素 $\zeta(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \zeta_m z^{-m-1}$ は関係式 $\zeta_m \zeta_n + \zeta_n \zeta_m = \delta_{n+m,0}$ で与えられる．この時，真空から n -積等で生成すると中心電荷 $1/2$ の超 VOA となる．

6.2 Mathieu moonshine (江口徹，大栗博司，立川祐二)

Witten genus は向き付き多様体に対して定義され，部分多様体で定義される値を係数とする z の冪級数である．ホモロジー群の次元を係数とする冪級数に似ている．特に，K3 曲面から elliptic genus $Z^{K3}(\tau, z)$ が定義され，この冪級数 $Z^{K3}(\tau, z)$ が $N = 4$ 超共形代数のラモンド指標（冪級数）の線形和となることが知られている．江口徹，大栗博司，立川祐二は，実際にその係数を調べ， $c_0 = -1$ 以降の $c_1 = 90, c_2 = 1540, \dots, c_7$ が M_{24} の指標になっており，しかも， M_{24} の元の指標に置き換えると Mock theta 関数の初期の係数たちと一致していることに気づいた．そこで，モンスター群の Moonshine 予想の Mathieu group 版ではないかとして，Mathieu moonshine 予想を立てた．計算機を使ってかなり高次まで計算するなど，この問題には多くの研究者が参加した．最終的に， M_{24} -加群は存在すること (Much ado about Mathieu (Terry Gannon)) が証明された．ただ，VOA のような代数構造は見つからず，研究は膠着状態となっている．

超 VOA の加群は当然 V^0 -加群でもあるので、一見すると、 V^0 の表現がすべて分かれば、 V の表現が分かり、超 VOA の表現を考える必要がないように思われる。ところが、加群 $M = M^0 \oplus M^1$ に対し、差 $\text{Tr}_{M^0 \oplus M^1} = \text{Tr}_{M^0} - \text{Tr}_{M^1}$ を考えると、各 M^i 上のトレース関数には意味不明なものがあっても、その差で意味不明なものが消え、意味を持つことがある。この立場（個人的見解）でみると、超 VA では、even と odd の差（一般指標）が自然なので、群の加群の方も指標ではなく、指標の差（一般指標）で考える方が自然だと思える。すると、Mathieu moonshine に出てくる数値は、中心電荷 12 の超 VOA とラモンド指標を与える部分代数の商と捉えることができる。ここでは、中心電荷 12 から $q^{-12/24}$ とウェイト 1/2 の両方から $q^{1/2}$ が出てきて打消しあっている。

7 群論に戻って。モンスター群とはなにもの？

大きな波に流されたものとして、故郷に何か役に立つことはないだろうと思う。例えば、上記の質問に対して、一般の人は「散在型有限単純群の中で最大なもの」と答えるだろう。しかし、これでは相対的な答えに過ぎない。MoonshineVOA の全自己同型群 $M = \text{Aut}(V^\natural)$ であると答えるのが、 M そのものを表す絶対的な答えである。このような答えは、良く研究されている他の散在型有限単純群でも散見される。例えば、

マシュー群 $M_{24} = \text{Aut}(G_{24})$ G_{24} （拡大ゴーレイ符号）はランク 24 の自己双対 2 元符号
Conway 群 $Co_0 = \text{Aut}(\Lambda)$ Λ （リーチ格子）はランク 24 の自己双対正定値隅格子

しかも、 G_{24} は最小ウェイト 8 を、 Λ は最小ウェイト 4 を持ち、その条件で一意的に決まるという特異性を持つ。これがこれらの群の特異性をも示す。 $V^\natural$ も中心電荷 24 の正則 VOA の中でゼロでない最初ウェイト 2 を持つものであるが、残念ながら現時点では、一意性は証明されていない。

それゆえ、モンスター群 M の特異性を示すには、次のようなものが必要である。

予想 21 (Moonshine 型 VOA の一意性 FLM 1988) $V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n$ が中心電荷 24 の VOA で、非退化不変内積 $\langle, \rangle$ を持ち、指標 $\sum_{n=0}^{\infty} \dim V_n q^{n-1}$ が $J(\tau) := q^{-1} + 196884q + \dots$ なら、 $V \cong V^\natural$ 。

私には全く意味が分からないが、Wikipedia の記事に次のような文が載っている。
Edward Witte の示唆: AdS 空間内の最大の負の宇宙定数を持つ重力は、Moonshine 型 VOA の AdS/CFT 双対である。

この一意性の問題は全く進展していなかったが、最近、少しずつ進展している。

参考文献

- [1] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker and R. A. Wilson, *Atlas of finite groups*, Oxford University Press, (1985).
- [2] R. E. Borcherds, *Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 83 (10) (1986).
- [3] R. E. Borcherds, *The monster Lie algebra*, Adv. Math. 83, no. 1 (1990).
- [4] R. E. Borcherds, *Monstrous moonshine and monstrous Lie super-algebras*, Invent. Math. 109 (1992),
- [5] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*, *Pure and Appl. Math.* Vol. 134, Academic Press, Boston, (1988).
- [6] Y.-Z. Huang, *Differential equations and intertwining operators*, Commun. Contemp. Math. 7 (2005).
- [7] I. Frenkel, Y. Huang, *On axiomatic approaches to vertex operator algebras and modules*, Memoirs of the american mathematical society, (1993).
- [8] E. Jurisich, *Borcherd's proof of the Conway-Norton conjecture*. Moonshine: the first quarter century and beyond, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 372, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (2010).
- [9] V. Kac, *Vertex algebras for beginners*, University Lecture Series, (1998).
- [10] M. Miyamoto, *A modular invariance on the theta functions defined on vertex operator algebra*, Duke Math. J. (2000).
- [11] M. Miyamoto, *A new construction of the moonshine vertex operator algebra over the real number field*, Annals of Math. (2004).
- [12] M. Miyamoto, *Modular invariance of vertex operator algebras satisfying C_2 -cofiniteness*, Duke Math. J. 122 (2004).
- [13] M. Miyamoto, *C_1 -cofiniteness and Fusion Products of Vertex Operator Algebras*, "Conformal field theories and tensor categories" held in 2011 (editor Y.-Z. Huang), Springer Proceedings in mathematics & Statistics (2013), arXiv:1305.3008.
- [14] M. Miyamoto, *A C_2 -cofiniteness of cyclic orbifold models*. Comm. Math. Phys. 335 no.3 (2015).
- [15] Y. Zhu, *Modular invariance of characters of vertex operator algebras*, J. Amer. Math. Soc., 9 (1996).