

クイバーから得られる冪零リー代数上の幾何構造

微分幾何学において、多様体がいつどのような特別な幾何構造を持つかは基本的な問題である。その中でもリー群には左不変幾何構造が付随し、重要な研究対象である。単連結リー群とその上の左不変計量は、対応するリー代数とその上の内積によって構成される。これにより、リー代数上の幾何構造に関して同様の議論が可能となる。リー代数は、レビ分解によって半単純部分と可解部分に分解される。半単純リー代数は分類がなされているのに対し、可解リー代数の部分代数である冪零リー代数でさえ分類もなく、一般論が困難であるとされている。 m -ステップ冪零リー代数とは、括弧積を m 回取ると 0 になるリー代数である。2 ステップの場合には盛んに研究されているが、ステップ数が高い場合は、未解明な点が多い。そのため、次の 2 つの問題が考えられる。1 つ目は、扱いやすい冪零リー代数 (特に、ステップ数の高い場合) の例を構成する。2 つ目は、その冪零リー代数がいつどのような幾何構造を持つか調べる。

私は、クイバーという図 1 のような点と矢印で表された図からリー代数を構成する新たな方法を定義した。クイバーの道とは、向きが正しくつながっている矢の列で、矢の個数を道の長さという。右のクイバーにおいて、長さ 1 の道は a, b, c, d, e 、長さ 2 の道は ab, be, ce, de 、長さ 3 の道は abe である。

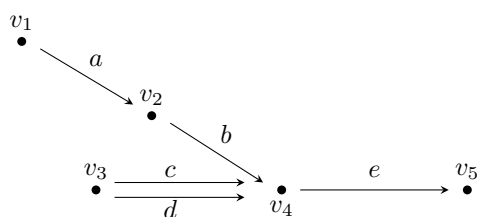


図 1 クイバーの例



図 2 クイバー Q_1

クイバー Q に対して、 n_Q を Q のすべての道を基底とする空間とし、道をつなげる演算を積として定めた代数を道代数という。私は、この道代数の積から交代積として括弧積を定め、リー代数 n_Q を定義した。ここで、サイクルとは始点と終点一致する道のことある。サイクルを含むクイバーから得られるリー代数は、道が無限に存在するため無限次元となる。サイクルを含まない有限クイバー Q から得られるリー代数 n_Q は冪零リー代数であり、 Q のすべての道の最大値がステップ数である。これにより、道の長さの最大値が大きなクイバーを考えると、ステップ数の高い冪零リー代数を構成することができる。例えば、図 2 から得られるリー代数 n_{Q_1} は道 a, b, ab で張られる 3 次元ベクトル空間である。括弧積は、 $[a, b] = ab, [a, ab] = [b, ab] = 0$ となる。このとき、 n_{Q_1} は 3 次元ハイゼンベルグ代数と同型である。

次に、この方法で得られた冪零リー代数がいつどのような幾何構造を持つか調べる。リーマン多様体 (M, g) 、リッチ曲率テンソル ric_g に対して、実数 c とベクトル場 X が存在して、 $\text{ric}_g = c \cdot g + \mathcal{L}_X g$ を満たすとき、リッチソリトンであるという。リッチソリトンは、微分同相写像や拡大縮小で動かしたリッチフロー方程式の解と知られており、アインシュタイン ($\text{ric}_g = c \cdot g$) を一般化した幾何構造である。私は次の定理を示した。サイクルを含まないクイバーから得られる冪零リー代数に対応する単連結リー群は、いつでも左不変リッチソリトンリーマン計量を許容する。この定理により、リッチソリトンを許容する任意のステップ数の冪零リー群が得られることがわかる。

キーワード: 可解リー代数, クイバー, リッチソリトン