臨界型変分問題

数学コース　佐野　めぐみ

私は「関数不等式の最良定数に付随する臨界型変分問題及び関連する偏微分方程式の解の存在や挙動及び性質」を中心に研究を行っています。以下、用語について説明します。

●変分問題とは？

変分問題とは、ある（エネルギー）汎関数の極値（特に最小値、最大値）を与える関数を求める問題で、高校数学で習う関数の極値を求める問題を、関数空間という無限次元空間上で考えたものです。ある現象が変分問題の解として与えられるとき、「変分原理に従う」と言いますが、光学における Fermat の原理、古典力学における最小作用の原理、測地線の存在問題、等周問題、プラトー問題など、私たちの身のまわりの多くの現象が変分原理に従って起こっています。また変分問題は微分方程式と密接に関係しており、変分構造をもつような微分方程式の場合は、変分法が強力な手法として機能することが知られています。

注）汎関数、無限次元空間：高校数学までは、実数の集合（←有限次元空間）から実数の集合への関数を主に考えていましたが、変分問題では主に関数の集合（←無限次元空間！）から実数の集合への関数（これを汎関数と呼ぶ）を考えます。

等周問題：周囲の長さを一定とするとき、囲まれる面積を最大にする図形を求める問題。

変分構造、微分方程式、変分法：自然現象を記述する手段として知られる微分方程式において、具体的に解ければ良いのですが、例えば天体力学でよく知られている 3 体問題に関してそのような解法は原理的に存在しないことが判明しており、19 世紀以降、解の具体的な形を知ることなく、微分方程式の解の存在（そもそも解が存在するのか？）や性質について研究がなされてきました。特にその微分方程式に対応した汎関数がある場合は「変分構造をもつ」微分方程式となり、「汎関数の微分がゼロになるような点（臨界点）を求める」という変分法を用いて、微分方程式の解の存在を証明することができます。

●臨界型変分問題とは？

私が扱う汎関数の定義域は主にソボレフ空間（関数空間の一種）なのですが、上記で述べた通りこの空間は無限次元空間で、例えば有限次元空間で成り立つボルツァノ–ワイエルシュトラスの定理（有界列は収束する部分列をもつ）が成り立たなかったり、埋め込みのコンパクト性が欠如していたりする影響で、近似解の列（臨界点に近づく列）が適切に収束するかどうかは一般には分かりません。このようにコンパクト性が保障されていないような変分問題は通称「臨界型変分問題」と呼ばれ、取り扱いが非常に困難となるのはもちろんですが、複雑で興味深い現象が起こることが知られています。

キーワード：関数不等式、偏微分方程式、変分問題、非コンパクト、臨界ソボレフ空間