円形ニムの双対性と、P局面集合決定の別証明について

篠田 正人（奈良女子大学研究院自然科学系）

第11回広島岡山代数＋ゲーム研究集会

March 15, 2026

（最終更新 March 18, 2026 最終ページに追記があります）

石を取るゲーム

石の山は全部で n 山とする。ゲームの局面集合を

$$\mathbb{X} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

で表す。プレイヤーの可能な着手を定める着手集合を S として、

$$S \subset \mathbb{X} \quad \text{かつ} \quad \mathbf{0} \notin S$$

の条件を課して与える。

プレイヤーは 2 人、自分の手番で石を取れなければ負け、とする。

2 人零和有限確定完全情報ゲーム

$\mathbb{X}$ の 2 つの元 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ について

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{y} &= (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \ldots, x_n \pm y_n), \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y} &\iff {}^{\forall} i \quad x_i \geq y_i \iff \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \mathbb{X} \end{aligned}$$

と定める。

自分の手番での局面 $\boldsymbol{x}$ と着手 $\boldsymbol{s} \in S$ について、$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{s}$ ならばこの着手 $\boldsymbol{s}$ が可能であり、局面は $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s} \in \mathbb{X}$ となって手番は相手に移る。

この S の設定によりゲームが定まり、初期局面が $\boldsymbol{x}$ であるとき双方合わせて $|\boldsymbol{x}|$ 手以内でゲームは終了し勝者と敗者が定まり、引き分けは生じない。$(|\boldsymbol{x}| = \sum_{i=1}^{n} x_i)$

P 局面集合

各局面 x は、先手（この局面で手番を行うプレイヤー）に必ず勝てる戦略がある N 局面と、後手に必ず勝てる戦略がある P 局面に分類することができる。

この P 局面の集合を（S によって定まる、という意味で）P_S と表す。定義より $\mathbf{0} \in P_S$ である。

Example 1

1 山での制限ニムを考える。$S = \{2, 3\}$ とすると
$P_S = \{0, 1, 5, 6, 10, 11, 15, 16, \ldots\}$ である。

ゲームの例

Example 2

3 山での（標準的な）ニムを考える。
$S = \{(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c) \mid a,b,c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \setminus \{\mathbf{0}\}$ とすると
$P_S = \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = 0\}$ である。

Example 3

3 山での Moore のニム $MN(3,2)$ を考える。
$S = \{(a,b,0),(a,0,c),(0,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \setminus \{\mathbf{0}\}$ とすると
$P_S = \{(x,x,x) \mid x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ である。

P 局面集合の「双対性」

ここで、与えられた 2 つの着手集合 S, T に対しそれぞれ得られる P 局面集合 P_S, P_T が

$$S \cup \{\mathbf{0}\} = P_T, \quad T \cup \{\mathbf{0}\} = P_S$$

という関係にあるとき、S と T は双対性を持つ、ということにする。

Example 4

1 山制限ニム、$S = \{1, 2, 3\}$ とすると $P_S = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, \ldots\}$ である。

これに対し $T = \{4, 8, 12, 16, 20, \ldots\}$ とする、すなわち 4 の倍数個の石を取る着手だけが許されるゲームを考えると、$P_T = \{0, 1, 2, 3\}$ となる。

よって $P_T = S \cup \{\mathbf{0}\}$ および $P_S = T \cup \{\mathbf{0}\}$ が成り立つため、S と T は双対性を持つ。

S からの双対性

また、与えられた S によって定まる P 局面の集合 P_S から $T = P_S \setminus \{\mathbf{0}\}$ を定め、この T から定まる P_T が $S \cup \{\mathbf{0}\}$ と一致するときには S からの双対性を持つ、ということにする。

Example 5

$\mathbb{X} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$、$S = \{1, 2, 3, 5\}$ としても $P_S = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, \ldots\}$ である。

この P_S から $T = P_S \setminus \{\mathbf{0}\} = \{4, 8, 12, 16, 20, \ldots\}$ と定めるとき、$P_T = \{0, 1, 2, 3\}$ となり $S \cup \{\mathbf{0}\}$ に一致しないため、S からの双対性を持たない。

ただし、$T = \{4, 8, 12, 16, 20, \ldots\}$ を先に与えると $P_T = \{0, 1, 2, 3\}$ となり、$S = P_T \setminus \{\mathbf{0}\}$ とすれば $P_S = T \cup \{\mathbf{0}\}$ となるため T からの双対性を持つ。

n 山ニムの双対性

Example 6

$T = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \setminus \{\mathbf{0}\}$、すなわち「2 つの山から同数個の石を取る」というゲームを考えると $P_T = \{(x_1, 0), (0, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ である。

この P_T は片方の山の石がなくなっているので、このゲームでの終了局面である。このゲームは 2 山のニムと双対の関係にあることがわかる。

同様に、n 山ニムでは P 局面集合から $\mathbf{0}$ を除いた着手集合から定まるゲームを考えれば、双対性が成り立つことがわかる。

練習問題：3 山のニムから定まるゲーム、すなわち $T = \{(a, b, c) \mid a \oplus b \oplus c = 0\} \setminus \{\mathbf{0}\}$ とするときの、勝つための戦略を求めよ。たとえば $(24, 21, 15)$ ではどのように石を取ればよいか。

円形ニム

円形ニム $CN(n,k)$ では、n 個の山を円周上に並べ、各手番の着手では連続して隣接する k 個以内の山から同時に石を取ることを可能とする。

すなわち、可能な着手の集合を、連続して隣接する $n-k$ 個の山の石数を変えなければよいとして

$$S = \{(s_1, s_2, \ldots, s_n) \mid {}^{\exists}i\ s_i = s_{i+1} = \cdots = s_{i+n-k-1} = 0\} \setminus \{\mathbf{0}\}$$

（ただし $s_j = s_{j+n}$ とする）と定めるルールである。円形ニムは以下のルールのゲームを含む。

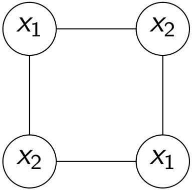
- $CN(n,1)$ は通常の n 山ニムである。
- $CN(n,n-1)$ は Moore のニム $MN(n,n-1)$ である。

円形ニム $CN(4,2)$

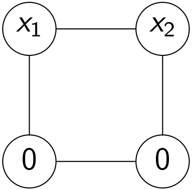
Example 7

円形ニム $CN(4,2)$ は、正方形の 4 頂点にそれぞれ石の山があり、1 辺を共有する 2 頂点の山から同時に石を取ることのできるニムである。

このときの P 局面集合は $P_S = \{(x_1, x_2, x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ となる。ここで T として「対角線上に向かい合う山どうしからそれぞれ同数の石を取る」着手を可能とするニムを考えると、このときの P 局面は「ある隣り合う 2 山の石の個数が 0」である局面であり、$S \cup \{\mathbf{0}\} = P_T$ および $T \cup \{\mathbf{0}\} = P_S$ の関係が成り立つため S と T は双対性が成り立っている。



P_S の局面



P_T の局面

牧の定理

牧拓澄氏（鹿児島大学）により、以下の事実が指摘された。

Theorem 1 (牧、private communication)

円形ニムにおいては S からの双対性が成り立つ。

すなわち、円形ニムの可能な着手集合 S によって定まる P 局面の集合 P_S から $T = P_S \setminus \{\mathbf{0}\}$ を定めると、この T から定まる P_T が $S \cup \{\mathbf{0}\}$ と一致する。

この定理の証明は

$$(S - S) \cap (P_S \setminus \{\mathbf{0}\}) = \emptyset$$

（任意の $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}' \in S$ に対して $\boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}' \notin P_S \setminus \{\mathbf{0}\}$）から示される。

円形ニムでの着手の性質

S からの双対性が成り立つための本質的な条件は、言い換えると

$$\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}' \in S, \quad \boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}' \in P_S \implies \boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}'$$

である。円形ニムの場合は、

$\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}' \in S$ がそれぞれ隣接する k 個以内の山から石を取る着手

であり、$\boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{s}'$ であるためには

$\boldsymbol{s}'$ で石を取る山からは $\boldsymbol{s}$ でも石を取らなければならない

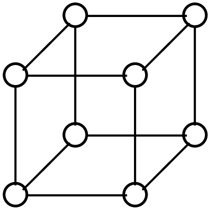
ため、$\boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}'$ でも隣接する k 個以内の山を除き石数 0 であるため（$\mathbf{0}$ でない限り）P 局面となり得ないことによる。

双対性の成り立つ他の例

立方体ニム

立方体の各頂点に石の山がある。手番のプレイヤーは、同一の面に属する頂点の山から同時に石を取ることができる。

このルールでも、上記の可能な着手の集合 S からの双対性が成り立つ。



円形ニムのP局面集合決定の証明

この双対性をそのまま用いるわけではないが、着手集合とP局面集合を入れ替えるアイデアによってP局面集合決定の証明を書き換える例を円形ニムで示す。

一般的に、コンピュータによる探索などで推測された P_S が確かにP局面集合であることを証明するには

$$^{\forall}\boldsymbol{x} \in P_S, {}^{\forall}\boldsymbol{s} \in S, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{s} \notin P_S \tag{1}$$

および

$$^{\forall}\boldsymbol{y} \in \mathbb{X} \setminus P_S, {}^{\exists}\boldsymbol{s} \in S, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{s} \in P_S \tag{2}$$

を示さねばならない。

円形ニムでは、S と P_S に対する (1)(2) の証明がどちらも面倒であることがしばしばある。

円形ニムでの S からの双対性

(1)(2) が成り立つとき、S および P_S から $T = P_S \setminus \{\mathbf{0}\}$ および $P_T = S \cup \{\mathbf{0}\}$ を定めると

P_T が T に対する P 局面集合となる必要十分条件の

$$^{\forall}\boldsymbol{x} \in P_T, {}^{\forall}\boldsymbol{t} \in T, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{t} \notin P_T \tag{3}$$

および

$$^{\forall}\boldsymbol{y} \in \mathbb{X} \setminus P_T, {}^{\exists}\boldsymbol{t} \in T, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{t} \in P_T \tag{4}$$

が成り立つことが言える。

円形ニムでは (3) は $(S - S) \cap (P_S \setminus \{\mathbf{0}\}) = \emptyset$ により成り立ち、(4) は (2) から導かれる。

双対性のアイデアを用いた P 局面集合決定の証明

この手順を逆転させ、逆に (1)(2) の証明を (3)(4) で済ませたい。

$T = P_S \setminus \{\mathbf{0}\}$ を着手集合とするゲームは

- 適切な着手を行えば、高々一手で終了する
- 目標とする局面がわかりやすい（隣接する k 個の山の石を 0 にすればよい）

という考えやすさがある。しかし **(3)(4)** から一般的に **(1)** を示すことはできない。

詳しく言うと、(3)(4) をみたす T および P_T から $S = P_T \setminus \{\mathbf{0}\}$ および $P_S = T \cup \{\mathbf{0}\}$ としても (1) が成り立つとは限らない。すなわち、S からの双対性が成り立つだけでは T からの双対性は保証されない。

P 局面集合決定の証明のアイデア

(4) の条件から (2) は導けるため、あと何を加えれば (1) が成り立つのかを示したい。

ここではその一例として $(T - T) \cap (P_T \setminus \{\mathbf{0}\}) = \emptyset$、すなわち

$$^\forall \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}' \in T, \boldsymbol{t} - \boldsymbol{t}' \notin (P_T \setminus \{\mathbf{0}\}) \tag{5}$$

を (4) に加えて課す。

以上を整理すると、円形ニム $CN(n, k)$ の P 局面集合が P であると推測された際、それを証明するためには

- 石数 0 個の山が $n - k$ 個以上連続して隣接しない局面から石数 0 個の山が $n - k$ 個以上連続して隣接する局面への着手が P に含まれる
- P に含まれる 2 つの局面の差が、本来の着手集合 S に含まれない

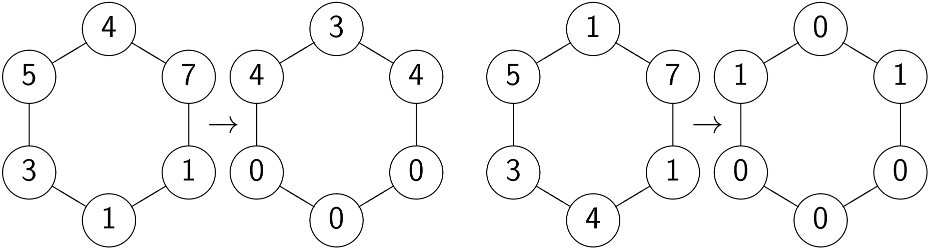
という 2 つを示すことになる。

$CN(6,3)$ の例

円形ニム $CN(6,3)$、すなわち円周上に並ぶ 6 つの石の山のうち連続して隣接する 3 つの山を選んで石を取るゲームを考える。

$$P_S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mid x_1 - x_4 = x_5 - x_2 = x_3 - x_6\}$$

このとき $T = P_S \setminus \{\mathbf{0}\}$ とする。このとき、隣接した 3 つの山の石を 0 個にすることが可能である。



考察

- 円形ニムにおいて (4)(5) の条件が示しやすいかというと、結局労力が変わらない可能性は高い。特に既存の証明が複雑である $CN(7,4)$ の場合について、簡略化した別証明が可能かを調べたい。
- (5) の条件を、石数 0 個の山が $n-k$ 個以上連続して隣接しない局面から、石数 0 個の山が $n-k$ 個以上連続して隣接する局面への着手の一意性に置き換えることは可能である。ただしこれは証明のための十分条件であって必要条件でない。

  この一意性の条件は、ある意味で着手の集合に無駄なものが含まれないことを言っている。制限ニムの双対性に関連して極小性が現れるのと同様、双対性には「無駄がない」ことがキーワードとして含まれそうである。
- 今回は私の興味で円形ニムに限った設定としたが、より一般のゲーム設定でも双対性を考える価値は高そうであるので今後の進展を期待したい。

講演後の追記（2026/3/18）

牧拓澄さん（鹿児島大学)、井上博裕さん（広島大学）からのコメント：

- 着手集合 S から定まる P 局面集合 P_S をもとに新たな着手集合 $T = P_S \setminus \{\mathbf{0}\}$ を定めて考察する、というアイデアは

  Larsson U., Hegarty P. and Fraenkel,A. Invariant and dual subtraction games resolving the Duchene-Rigo conjecture, *Theoretical Computer Science* (2011)
  Larsson U. The $*$-operator and invariant subtraction games, *Theoretical Computer Science* (2012)

  にあり、双対性が成り立つことに対する議論がなされている。

- S, T が双対性を持つための必要十分条件として

$$\mathbb{X} = \{\mathbf{0}\} \sqcup S \sqcup T \sqcup (S + T)$$

  （非交和）という表し方がある。